CARACTERIZACIÓN DE LAS CONSTRUCCIONES COGNITIVAS DE LOS ESTUDIANTES DE MATEMÁTICAS 2 CON LAS FUNCIONES DE DOS VARIABLES

JACKSON ALEXANDER ORJUELA DEVIA

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar título de Maestría En Educación

Director
JUAN PABLO PÉREZ PERDOMO
Magister en Matemáticas Aplicadas

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
IBAGUÉ - TOLIMA
2017

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACION
PROGRAMA DE MAESTRIA EN EDUCACIÓN

ACTO DE SUSTENTACION TRABAJO DE GRADO

Fecha : *Martes 25 de julio de 2017*
Hora : *8:00 a.m*
Lugar : *Bloque 15 aula 02 – Universidad del Tolima*

PROGRAMA

1. *Presentación:*

TÍTULO DEL TRABAJO DE GRADO

CARACTERIZACIÓN DE LAS CONSTRUCCIONES COGNITIVAS DE LOS ESTUDIANTES DE CÁLCULO 2 CON LAS FUNCIONES DE DOS VARIABLES

AUTOR: JACKSON ALEXANDER ORJUELA DEVIA

JURADO: JORGE JULIAN MAYORGA

1. *Reseña Biográfica*
2. *Exposición del autor (25 minutos)*
3. *Intervención y preguntas del jurado.*
4. *Intervención y aclaraciones del director.*
5. *Deliberación del jurado.*
6. *Lectura del acta de sustentación.*

Barrio Santa Elena – Ibagué Colombia. Tel. directo 2668912
A.A. 546 – PBX 644219 – FAX (982) 644869 – 9800665348

Scanned by CamScanner

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACION
PROGRAMA DE MAESTRIA EN EDUCACIÓN

ACTA DE SUSTENTACION PUBLICA N° 008

SEMESTRE A-2017

Siendo las 8:00 am horas del dia 25 de julio de 2017 se reunieron en el bloque 15 aula 02 –Universidad del Tolima, el estudiante, el jurado, el Director del trabajo de grado e invitados al acto de sustentación:

TITULADO:

CARACTERIZACIÓN DE LAS CONSTRUCCIONES COGNITIVAS DE LOS ESTUDIANTES DE CÁLCULO 2 CON LAS FUNCIONES DE DOS VARIABLES

La calificación otorgada por el jurado a la sustentación es la siguiente:

JURADO NOMBRE	JORGE JULIAN MAYORGA	CALIFICACION	4.2

SIENDO LAS: 8:50 AM , HORAS SE CERRO EL ACTO DE SUSTENTACION

EN CONSTANCIA SE FIRMA:

JURADO NOMBRE	JORGE JULIAN MAYORGA	FIRMA	

Barrio Santa Elena – Ibagué Colombia. Tel. directo 2668912
A.A. 546 – PBX 644219 – FAX (982) 644869 – 9800665348

Scanned by CamScanner

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACION
PROGRAMA DE MAESTRIA EN EDUCACIÓN

FORMATO PARA CALIFICACION DE TRABAJOS DE GRADO
(Para uso del Jurado)

FUNCIONES	*CALIFICACION ASIGNADA*
1. *Aspectos de estilo y presentación*	4.2
2. *Marco teórico y actualización de conocimientos.*	4.2
3. *Método y técnicas adecuadas o de innovación en la metodologia.*	4.2
4. *Relevancia científica y/o tecnológica e importancia socioeconómica de los resultados y recomendaciones.*	4.2
NOTA FINAL	4.2

La calificación numérica equivale a la siguiente escala cualitativa así: Una nota definitiva menor de tres coma cero (3.0) equivale a REPROBADO; Entre tres coma cinco (3.5) y tres coma nueva (3.9) APROBADO, entre cuatro coma cero (4.0) y cuatro coma cuatro (4.4) SOBRESALIENTE, y entre cuatro coma cinco (4.5) cuatro coma nueve (4.9) MERITORIO y cinco coma cero (5.0) LAUREADO.

COMENTARIO DEL JURADO CALIFICADOR

CALIFICACION CUALITATIVA Sobresaliente.

NOMBRE DEL JURADO
JORGE JULIAN MAYORGA — *FIRMA*

NOMBRE DEL ESTUDIANTE
JACKSON ALEXANDER ORJUELA DEVIA — *FIRMA*

NOMBRE DEL DIRECTOR TRABAJO DE GRADO
JUAN PABLO PEREZ PERDOMO — *FIRMA*

Barrio Santa Elena – Ibagué Colombia. Tel. directo 2668912
A.A. 546 – PBX 644219 – FAX (982) 644869 – 9800665348

Scanned by CamScanner

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo es el logro que más he anhelado en mi vida, puesto que tuvieron que pasar 13 años después de la graduación de mi pregrado, una maestría no culminada en matemáticas aplicadas y muchas tristezas académicas que hicieran que a veces quisiera desistir de seguir con este objetivo.

Quiero agradecer principalmente a mi Mamá porque desde mi infancia hasta la persona que soy hoy en día me apoyó en todos los aspectos y sin ella todo esto no hubiese sido posible.

A mis hijas porque son mi motor, a pesar que en las horas de elaboración de la tesis no me ayudaron con la concentración que requería, el solo hecho de existir en mi vida fue un aliciente más para que la culminara.

A mi esposa quien aparte de su compañía y comprensión me acompañó con sus conocimientos para solucionar todas las dudas posibles que surgieron durante la su elaboración.

A mi director de tesis y amigo Magister en Matemáticas Aplicadas Juan Pablo Pérez quien con su conocimiento y ayuda permitió que me ilusionara con un proyecto que podría ayudarme a consolidar el título de Maestría que tanto anhelaba en mi vida. De igual manera, agradezco al curso que permitió la aplicación de este proyecto porque sin ellos y sus valiosos aportes era imposible el análisis que se realizó de la mejor manera.

A mis amigos quienes con sus consejos y aportes hicieron que nunca desistiera de terminar con este proyecto que mejoraría mi vida personal y laboral.
A mis familiares porque con su amor y su incondicional apoyo me dieron las fuerzas necesarias para culminar con este proyecto.

Al Magister en Educación Julián Mayorga (jurado) quien estudio mi tesis y la aprobó. A todos los que me apoyaron para escribir y concluir esta tesis.

Para ellos es esta dedicatoria de tesis, pues es a ellos a quienes se las debo por su apoyo incondicional.

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS.

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

Esta investigación tuvo como población de estudio estudiantes de tercer semestre de universidad, ellos se encuentran en un rango de edad entre 18 y 20 años, quienes hasta el día de hoy no han recibido ningún concepto previo de funciones en dos variables. Nuestra investigación identifica y caracteriza las diferentes estrategias cognitivas que utilizan los estudiantes que están en este semestre para resolver problemas simples en los que intervienen funciones de dos variables, apoyados exclusivamente en su razonamiento y capacidad cognitiva, dejando de forma visible como personas de esta edad con conocimientos básicos en calculo son capaces de desarrollar conceptos de funciones de dos variables con alguna o muy poca instrucción al respecto.

Palabras claves: Funciones en dos Variables, Educación Matemática, Teoría de los Campos Conceptuales, Desarrollo Cognitivo.

ABSTRACT

This research had as study population students of third semester of university, they are in an age range between 18 and 20 years, who until today have not received any prior concept of functions of two variables. Our research will identify and characterize the different cognitive strategies used by students in this semester to solve simple problems involving functions in more than one variable (2), supported solely on their reasoning and cognitive ability, leaving visible as people of this age with basic knowledge of calculus are able to develop concepts of functions of two variables with some or very little instruction about it.

Keywords: Functions of two Variables, Mathematical education, Conceptual Fields Theory, Cognitive Development.

INTRODUCCIÓN

Las funciones en varias variables como componente de las matemáticas, cumple un papel esencial en la enseñanza no solo en los primeros años de la educación superior sino también en su forma preliminar (funciones en una variable) en la parte final de la educación secundaria. Los estudiantes con conocimientos de un curso de cálculo univariado podrían inducir el comportamiento de las funciones de dos o más variables teniendo un acercamiento a ellas sin saber que realmente se está entrando en este campo, aunque, podría generar una confusión acerca de lo que se conoce y no se conoce de funciones; así como lo afirma Landa (2010): "Un acercamiento estático, partiendo de expresiones algebraicas inertes, puede no ayudar a hacer sentido de algunas ideas que incluye la noción de función con dos variables". (p. 131).

En la actualidad la enseñanza de las funciones de dos o más variables en la educación superior en particular las administraciones, se remite a un tema de un curso universitario de cálculo y es por esto que es dejado a un lado este concepto que entre los estudiantes no es muy conocido y por ende difícil de interpretar; inclusive a los estudiantes de estas carreras en alguna situación particular presentada en la cual intervengan la covarianza de dos o más variables, acudir a la inducción de conocimiento que se tiene de los cursos de cálculo univariado o matemáticas 1. Son poco los estudios sobre funciones en dos variables y es por esto que nuestro estudio muestra la importancia que tiene como referente en futuros estudios en esta línea.

Considerando estas situaciones y motivados en buscar nuevas estrategias de aprendizaje que permitan a los estudiantes en las aulas de clase tener nuevas herramientas en la interpretación y resolución de problemas en los que intervengan funciones de dos o más variables, se realiza esta investigación para mostrar que las funciones pueden emplearse en la educación de los estudiantes en la resolución de problemas en su perfil profesional.

Adicional a esto, se quiere mostrar que las funciones en dos o más variables tienen mucha importancia y relación con conceptos adicionales como curvas de nivel e inclusive la aplicación de ayudas tecnológicas para la ayuda de análisis de funciones. Además que esta investigación no solo está dirigida a las carreras en la cual se aplicó el estudio, cabe anotar que las funciones de dos o más variables tienen aplicaciones en casi todos los campos de estudio.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 PREGUNTA GENERADORA.

¿Cuáles son las estrategias conceptuales que utilizan los estudiantes de tercer semestre de: Administración Ambiental de la Universidad de Ibagué, cuando se enfrentan a situaciones en las que se desarrolla el concepto de función de dos variables, teniendo en cuenta que los estudiantes no han estudiado el concepto de función de dos variables?

1.2 OBJETIVO GENERAL.

Analizar las estrategias conceptuales que utilizan los estudiantes de tercer semestre de universidad cuando resuelve situaciones simples de la vida cotidiana en los que intervienen funciones en dos variables.

1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

- Identificar las estrategias conceptuales que aplican los estudiantes para solucionar situaciones en las que intervienen funciones de dos variables sin ninguna introducción previa.

- Describir las estrategias que utilizan para dar solución de las situaciones dadas.

- Categorizar las estrategias utilizadas por los estudiantes en la aplicación empírica de las funciones en dos variables.

2. ANTECEDENTES

Para esta investigación es importante tener en cuenta dos tipos de referentes, el primero es donde los autores se han centrado en lo cognitivo y el segundo es como los textos clásicos han abordado el concepto de la función de dos o más variables.

2.1 ANTECEDENTES COGNITIVOS.

2.1.1 El Cálculo En Carreras De Ingeniería: Un Estudio Cognitivo. Este autor Zuñiga (2007) indica que los procesos matemáticos cognitivos hacen referencia a lo mecánico y no a lo contextual cuando nos referimos a ellos; es decir, los profesores como protagonistas principales de la transmisión de conocimiento no enseñan la matemática como un proceso contextual sino como un proceso enteramente repetitivo que hace que los estudiantes cuando se vean envueltos en una problema causado por una situación de su línea profesional no puedan resolverla matemática y analíticamente porque no tienen la formación requerida para tal fin.

Zúñiga (2007) hace una reflexión a partir de la verdadera formación de los docentes que orientan en especial a las ingenierías puesto que no están preparados para orientar un curso en este contexto sino solo para transmitir todos los procesos matemáticos que aparezcan no en la vida profesional de sus educandos sino en los textos propuestos de matemáticas cuyos problemas no son tan recurrentes en la vida diaria. Este, según el autor es posiblemente una de las principales causas para que los estudiantes aún se pregunten durante su formación en matemáticas: ¿Porque y para que me sirve las matemáticas?

Zuñiga (2007) arroja resultados muy favorables entre los cuales se encuentra la forma como se aborda con elementos matemáticos la solución de un problema contextual sin encontrar el rechazo acostumbrado que se tiene cuando este tipo de situaciones requieren la intervención de un proceso matemático; otro resultado fue la disposición de los estudiantes a relacionar la teoría cognitiva con la solución a situación problema en su línea profesional ya que encuentran el verdadero uso de la matemática en distintos contextos en especial el de la ingeniería.

Caso particular de la eficiencia de este trabajo fue la no divulgación de contenidos de cálculo como soporte de resolución, en cambio se propuso un análisis profundo de una situación en su contexto de ingeniería para que ellos mediante sus conceptos matemáticos previos establecieran una solución real al problema y determinaran por sus propios medios que era necesario establecer una nueva teoría cognitiva en calculo diferencial de dos variables que ayudara en el proceso de solución; solución, que no era posible obtener a partir de sus bases teóricas.

Finalmente el objetivo del autor que se definía como el análisis especifico del funcionamiento cognitivo fue exitoso ya que se logró que los estudiantes integraran los elementos teóricos para la interpretación y explicación del estudio; además que como conclusión adicional y de vital importancia se dedujo que sin el acompañamiento del profesor no sería posible deducir los resultados de esta investigación puesto que en algunos casos se requirió de su intervención para explicar o simplemente ayudar al estudiante cuando se presenten falencias cognitivas en su aprendizaje.

2.1.2 Comprensión De Funciones Dos Variables Problemas Verbales Del Algebra. El trabajo realizado con estudiantes de grados inferiores en la construcción de funciones de dos variables es más complejo ya que se remiten mucho más al trabajo numérico presentando las mismas dificultades conceptuales que presentan estudiantes de educación superior. Cabe anotar que el proceso informal es muy importante para el desarrollo de problemas por parte de los estudiantes pero todo depende también del tipo de situación que se les plantee, claro está, que en los procesos numéricos esta informalidad aumenta significativamente.

Los procesos formales de matemáticas no son relevantes en la solución de problemas mientras que en la solución numérica su presencia es significativa.

El proceso matemático formal e informal para la solución de problemas presenta deficiencias no solo en educación superior, también en cursos de formación en los cuales los conceptos deben ser más recientes y por tanto su aplicación debe ser más efectiva. En nuestro caso aunque los estudiantes solo tienen conceptos previos de cálculo, se les dificulta de gran manera el análisis, construcción y solución de problemas en los que intervienen funciones de dos variables.

Es posible que si en las situaciones verbales se les presentara una estructura matemática ya definida para su solución en la cual solo importara el proceso matemático, los estudiantes estarían en capacidad de formular soluciones formales o informales de acuerdo a los conceptos obtenidos también de este mismo tipo que diera respuesta a los problemas sugeridos.

Como hace referencia Martínez, Díaz & Soto (2007) la forma de solucionar un problema verbal de un estudiante de educación superior es mucho menos informal, ya su análisis se resume y limita a todos los concepto y educación formal recibida, mientras que los estudiantes a una edad temprana, confían mucho más en su intuición y en los conceptos informales para el análisis tanto de problemas como de situaciones numéricas.

En resumen "las estrategias formales se consideran como la formulación de un razonamiento numérico para resolver problemas verbales. El alumno convierte el problema verbal o informal en una ecuación numérica que se corresponde con la representación algebraica, es decir, construye una representación formal sobre las tareas informales".

Luego entre los alumnos no existe una forma de construcción apropiada para expresiones algebraicas que representen una situación o problema, la educación formal no ha sustentado este proceso de manera formal y esto muestra las limitaciones de un estudiante en la solución de dicho problema; es aquí donde el profesor entra de manera de conexión entre el estudiante y la dificultad en la situación que se presenta.

2.1.3 Acercamiento A Funciones De Dos Variables. La construcción del concepto de funciones de dos variables es tan compleja que en algunos casos se debe acudir a herramientas que permitan que estas funciones tengan el sentido real y no parezcan otra función más en la que el estudiante interprete como una figura bidimensional. Esto se presenta por los vacíos en el campo conceptual que ha construido previamente y no le permite indagar un poco más. Así como lo establece Landa (2010) “un acercamiento estático, partiendo de expresiones algebraicas inertes, puede no ayudar a hacer sentido de algunas ideas que incluye la noción de función con dos variables, como la covariación entre las variables involucradas”. (p. 131); esto es, las funciones algebraicas no representan realmente un interés para el estudiante, y si estas no lo son, construirla teniendo en cuenta la covariación de variables independientes hacen que tampoco sea de su agrado.

Landa (2010) establece que el uso de herramientas como el Derive 6.1, permite al estudiante representar cualquier tipo de funciones con dos variables independientes sin necesidad de interpretar la expresión algebraica; sin embargo en este ámbito el estudiante sin esta herramienta es capaz de no solo graficar, sino construir una función con dos variables con el solo conocimiento previo que se tuene de cálculo unidimensional?; luego el autor nos hace referencia a que “como herramienta de análisis de gráfica, esta ayuda es fundamental y requiere de su buena comprensión y posterior utilización, pero si queremos que los estudiantes entiendan el verdadero proceso de construcción de una función y como se pueden relacionar algunas variables en una situación real, se hace necesario que los estudiantes se enfaticen mucho más en el análisis de estos problemas y en la construcción de lo verbal a lo matemático de este.

2.1.4 Ingeniería Didáctica, Artigue. (Artigue, Douady & Moreno, 1995, p 97-135.) Hace referencia a los caminos para la representación no solo de funciones con dos variables sino a todo lo que representa este campo del cálculo; caminos que no son fáciles, que no requiere de una técnica o un proceso mecánico que permita encontrar imágenes de una función, no, también requiere de un análisis y una interpretación numérica y algebraica de una situación real que se pueda resolver o solucionar a partir de estas funciones. Esto es, que estas técnicas también son importantes en el desarrollo de la situación ya que después de su construcción algebraica se hace necesario la solución matemática del problema, es decir, lo analítico no es independiente de la técnica puesto que lo que se espera es una solución a la situación problema y esta no sería posible de encontrar.

Estas aproximaciones intuitivas se hacen más relevantes en el caso de los estudiantes que no tienen formación previa de cálculo quienes de manera más analítica establecen conceptos de funciones con dos variables sin tener en cuenta que están construyendo su propia teoría de este campo; teoría que es mas de su terminología y por ende más fácil de aprender.

La enseñanza del cálculo es bastante compleja y hace que las ayudas tecnológicas dejen en una posición más confortable a los estudiantes que tienen un buen manejo de estas. Además la intuición hace que se construyan teorías especialmente de cálculo desde experiencia erróneas que aunque en su totalidad no coinciden con la teoría formal, si se acerca de tal forma que a partir del ensayo y error de algunas ideas intuitivas se construya el concepto de muchas de las teorías que conforman el campo del cálculo.

2.1.5 Visualización De Dos Funciones De Dos Variables. El autor nos muestra una metodología tecnológica como lo es Derive para visualizar funciones de dos variables y sus características dejando a un lado la construcción de funciones de este tipo por medio del análisis de situaciones de la vida en la cual se pueda presentar; en efecto se entiende que las matemáticas en su forma algebraica son difíciles para el buen entendimiento de los estudiantes y requiere de una formación mínima en esta área; ni que decir de su forma verbal para la construcción de esta; es por esto que el autor propone a los maestros facilitar el aprendizaje de estos estudiantes mediante ellas.

Propone establecer características de funciones de dos variables a partir de su gráfica, mientras su parte algebraica hace las veces de una simple expresión matemática que la representa pero que no se estudia en su estructura, perdiéndonos de toda las características que se pueden obtener de esta.

2.1.6 Conceptualización Función Exponencial. Sureda & Otero (2013) Hace referencia a la construcción de conceptos teóricos matemáticos a partir de situaciones y problemas, aunque cabe destacar que se presentan dificultades notorias con el hecho que los estudiantes al resolver problemas matemáticos de cualquier tipo tienden a solucionarlos por medio de teorías que para ellos son muy recurrentes y que en algunos casos manejan de la mejor manera así sean erradas, pero son a partir de ellas que los conceptos son construibles.

El autor indica que todos los procesos de resolución del problema infieren en cierta medida una construcción recurrente a la teoría conceptual de función exponencial, ya que aunque sea mínimo el rastro de estas funciones en algunos casos, estas muestran ya una tendencia que hace que deje de ser esa teoría primaria a una nueva teoría que aunque ellos creen aun que es lineal, tiene varios aspectos y características que la hacen como una primera construcción de la teoría de función exponencial; este es uno de los casos de la investigación sin embargo más adelante se presentan nuevas formas de resolución, que hace que los estudiantes trabajen con teoría de funciones exponenciales sin tener idea que lo que acaban de construir es una nueva teoría de conocimiento.

2.1.7 Enseñanza Del Cálculo Vectorial. Costa, Arlego & Otero (2014) Hace referencia en especial al estudio del cálculo vectorial (rama de las matemáticas muy importante para el estudio de la ingeniería por la aplicación que se hace a los fenómenos físicos por medio de vectores.) por medio de Recorridos de Estudio e Investigación (REI). El objetivo principal de los REI es introducir nueva pedagogía que le dé sentido y funcionalidad al estudio de las matemáticas enfrentando a aquellas obras terminadas en las matemáticas los cuales son solo posibles de utilizar como están escritos.

Lo que se implemento fue una estrategia de solución de problemas en los que interviniera teoría de Calculo vectorial en los cuales los aspectos organizativos matemáticos y físicos en cuanto a sus contenidos temáticos fueran reconstruidos de forma secuencial que permitiera la solución de este sin seguir un patrón normal formal como hasta ahora se había hecho.

En este trabajo se analizaron todos los condicionamientos sociales, culturales inclusive los específicos como la monodisciplinariedad y los acuerdos que se establecieron entre profesor y estudiantes que se presentaron en la aplicación de esta nueva estrategia que favorecieron y dificultaron el proceso; aparecieron nuevas reconstrucciones de organización matemáticas para la geometría analítica, diferencial, calculo vectorial e integral en una y una varias variables.

2.1.8 Geometrical Representations In The Learning Of Two-Variable Functions. Trigueros & Martinez-Planell (2010) El autor tiene como objetivo contribuir a la literatura con respecto a la comprensión del cálculo multivariado a partir de conceptos geométricos aplicando el estudio a un grupo de estudiantes que han tomado un curso de cálculo multivariable previamente. Los trabajos de investigación además que son escasos, no se remiten a la comprensión de los estudiantes a la noción de ideas principales para la construcción de este campo si no se enfocan en determinar características ya establecidas de dichas funciones. Resalta la importancia de la visualización matemáticas con relación a la construcción y comprensión de conceptos y esto es el fuerte que determino en muchos estudios de investigación aunque así mismo determino en otros estudios la dificultad de visualización de los estudiantes para la comprensión de la teoría en este caso, el del campo del cálculo; sin embargo, argumento que la visualización se puede utilizar como una herramienta clave del aprendizaje. Es ahí que a partir de la visualización que los estudiantes descubren nuevas rutas de interpretación del aprendizaje de las matemáticas, pueden establecer secuencias que representarían situaciones exitosas que inclusive una persona experta no determinaría pero que para ellos aunque no lo sepan, es una teoría o estructura conceptual valida.

En conclusión el estudio determina la dificultad de comprensión de los estudiantes en la construcción de las gráficas en planos tridimensionales, específicamente la construcción de subconjuntos de puntos en el espacio. Aunque en algunos estudiantes se demostró un conocimiento más profundo dentro de la teoría y evidencio lo que se quera determinar en todos los estudiantes, corroborando que la enseñanza del cálculo multivariado debe utilizar mejores herramientas para un mejor aprendizaje significativo y sea más apropiado para la comprensión de los estudiantes.

2.2 ANTECEDENTES CLÁSICOS.

El objetivo principal de referenciar estos textos, es el de mostrar la literatura que ha trabajado de alguna u otra manera la investigación que queremos mostrar; aunque no se enfatizan en la construcción del conocimiento si indican algunas aristas que hacen que el nuestro trabajo sea complementario y de uso reflexivo de parte de los autores que citamos.

La construcción del concepto y grafica de las funciones en varias variables tienen; si se quiere ver de esa forma, una dificultad en el proceso de enseñanza y es la profundidad que se muestra de este tema en algunos textos clásicos de matemáticas, especialmente en los textos centrados en el cálculo. Para ello es necesario analizar de una manera global algunos textos de matemáticas que en su contenido se desarrolle el concepto de funciones de dos variables, para resaltar los beneficios y dificultades del cómo se aborda esta definición para su buena comprensión.

Aunque se esperaría una temática más explícita como se hace con las funciones una variable, se da por hecho que los textos simplemente lo abordan como una extensión de este tema y por lo tanto no le dan la profundidad necesaria ya que sería un proceso pleonasmo. Por ejemplo en Leithold (2000) se aborda de una manera deductiva explicita si se compara con otros textos; el autor hace referencia a espacios numéricos n – dimensionales que tienen por elementos a (n – ordenadas) denotadas por $\mathbb{R}^n$ que derivan si $n = 2$ en parejas ordenadas en $\mathbb{R}^2$; $n = 3$ en ternas ordenadas en $\mathbb{R}^3$ y asi sucesivamente; es decir que define la función de manera análoga al de una variable, la define como un conjunto de pares ordenadas donde en la primer componente es un vector y la segunda un real; es decir, las funciones en dos variables son vistas como conjuntos de ternas ordenadas en $\mathbb{R}^3$ en las cuales definen el dominio de la función y a partir de ahí su gráfica que es formada a partir de trazas o inclusive de curvas de nivel; pero la construcción de funciones en dos variables es poca o nula y se deja como trabajo del lector en ejemplos y ejercicios haciendo uso de tablas de valores y aplicaciones sencillas de la economía sin una profundización en el tema. Cabe resaltar que el concepto lo reducen a una generalización natural de las funciones univariadas, como si fuera muy normal pasar del plano bidimensional al espacio de n-variables.

Otro autor que aborda las funciones en dos variables es Haeussler (2003) pero el texto se centra más en la construcción de las funciones a partir de ejemplos sencillos de la economía, que por supuesto al lector lo hace más familiarizado con la utilidad de estas funciones, pero por ser un texto aplicado a una rama especifica pierde la rigurosidad matemática que tienen otros textos. Sin embargo esta aplicación de los costos, la utilidad, los ingresos entre otros es muy importante para el buen entendimiento de cómo se construyen funciones en dos variables; cabe anotar que también Haeussler (2003) aborda, no con mucha rigurosidad, el concepto de función en dos variables como “el espacio de ternas ordenadas”; el dominio y grafica de estas funciones es elaborado mediante trazas así como la mayoría de textos.

Por otra parte, en el texto de Swokowski (1989) aborda el tema no como construcción sino desde una perspectiva mucho más matemática refiriéndose a $\mathbb{R}^3$ como un conjunto de vectores expresados como ternas o como combinación lineal de vectores unitarios; la grafica se representa con trazas al igual que los otros textos con la diferencia que tienen en cuanta algunos conceptos de vectores en $\mathbb{R}^3$. Podríamos resumir que la visión de este texto es desde lo vectorial pero que la idea fundamental de la construcción del concepto es poca o nula. Igual situación encontramos en el texto de Apostol (1999) que hace referencia a las funciones de varias variables que son vistas como un caso particular de los campos vectoriales, como un campo escalar, realmente ve las funciones como una transformación o como una función escalar de variable vectorial. Al igual que los otros textos muestran como las funciones de una variable son un caso muy particular de los campos escalares y vectoriales. Pero que en ninguno de los dos anteriores casos ilustran la construcción de funciones de dos variables a partir de situaciones problemáticas reales.

Encontramos otra literatura que permite estudiar las gráficas en función de dos variables a partir de las superficies de nivel, pero mantiene muy aislado de la forma como se pueden construir funciones que contenga dos variables independientes, sin embargo la literatura es bastante simple y entendible para quien quiera abordar este tema tomando como referencia este autor, hablamos del texto de Larson (2000) que da una buena herramienta para estudiar funciones en dos variables sin la posibilidad de quedar con muchos vacíos por lo simple y explícito de su exposición.

En síntesis podemos decir que el concepto de construcción de funciones en dos variables no requiere para los autores que se trate en todo un capitulo porque podría según su idea, construirse como una generalización natural de las funciones de una variable como si se considerara evidente pasar de un espacio $unidimensiona$l inclusive de uno $bidimensional$ a uno $n - dimensional$, además los textos clásicos no destinan mucho estudio a la construcción de este campo, ya que solo hacen una generalización directa de las funciones de una variable y abordan ligeramente sobre su dominio, imagen y su gráfica para luego dedicarle los capítulos necesarios a la construcción del concepto de derivadas parciales, gráficas y sus respectivas aplicaciones; sin embargo, en este trabajo se intenta determinar si los estudiantes son capaces de determinar y expresar funciones en dos variables si solo conocen las funciones de una sola variable y algunos otros conceptos teóricos.

3. MARCO TEÓRICO

3.1 TEORÍA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES (TCC).

La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990), se centra principalmente en la dimensión cognitiva del estudiante, y nos permite describir los procesos de conceptualización y analizar las construcciones que realiza el estudiante de los diferentes campos conceptuales.

3.1.1 Situación. En la Teoría de los Campos Conceptuales Vergnaud (1990) emplea el concepto de situación como el de tarea, y lo relaciona con el concepto que le dan los psicólogos: los procesos y las respuestas del sujeto son función de las situaciones a las cuales son confrontados. Dentro de este concepto de situación Vergnaud (1990) resalta dos elementos importantes, como lo son el de variedad e historia, en el primero determina que en un campo conceptual existen variedad de situaciones y en el segundo que los conocimientos de los alumnos han sido construidos a lo largo del tiempo por medio de situaciones a las que se han enfrentado de forma progresiva, especialmente las que le dan sentido a los nuevos conceptos. Vergnaud (1990) define una situación compleja como una combinación de relaciones elementales sin dejar de lado el análisis que generan este tipo de relaciones, en otras palabras una situación compleja es vista por Vergnaud (1990) como un conjunto de tareas.

Existe una relación entre las situaciones y los esquemas, esta relación es de tipo dialéctica dado que la existencia de unas suponen la existencia de las otras Otero, Fanaro, Sureda, Llanos & Arlego (2014), cuando el individuo enfrenta una situación construye consciente o inconscientemente un tipo de esquemas los cuales si es necesario pueden ser modificados en el proceso de adaptación a la situación por parte del individuo.

Vergnaud (1990) diferencias las situaciones en dos tipos:

- la primera está dada en el caso de que el sujeto cuente con todas las herramientas y competencias para enfrentar un tipo de situaciones, en este caso el esquema que construye el individuo es sistemático e inmediato.

- en la segunda ya el sujeto no cuenta con las competencias necesarias sino que tiene que hacer un proceso de exploración, de ensayo y error, llegando al éxito o al fracaso, en este caso el individuo construye diferentes esquemas que entran a competir entre sí o a ser modificados y adaptados a la situación.

3.1.2 Esquemas. Vergnaud (1990), define los esquemas como una organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dadas, recordando la relación dialéctica entre situación esquema que plantea Vergnaud (1990) pero es en los esquemas donde se deben estudiar los conocimientos en acto que el sujeto evoca al construirlo, teniendo en cuenta que el esquema no es un algoritmo estático de acciones, porque a pesar de que si contiene secuencias de acciones, estas dependen de los parámetros de la situación.

Estos esquemas funcionan de forma distinta para cada caso de las dos clases de situaciones descritas anteriormente, en la primera cuando el sujeto cuenta con todas las herramientas necesarias, los esquemas son sistemáticos e inmediatos, ya en el segundo caso cuando el sujeto no cuenta con el repertorio necesario se usan varios esquemas que comienzan a competir entre ellos, se acomodan, desarticulan y recombinan para llegar a la meta deseada.

Los esquemas cuentan con elementos fundamentales Vergnaud (1990), los cuales están dados por:

- Metas y Anticipaciones. El esquema esta evocado a una clase de situaciones donde el sujeto encuentra una finalidad o dado el caso sub-metas.

- Reglas de Acción. Dan el rumbo a seguir para generar el esquema, son reglas de búsqueda de información para la consecución de la meta o submetas.

- Invariantes Operatorios. Los conceptos en acto, definidos como categorías pertinentes para el sujeto en la situación y teoremas en acto, definidos como afirmaciones que el sujeto considera verdaderos.

- Posibilidades de inferencia. Es el razonamiento que hace el individuo de forma inmediata para la situación.

3.1.3 Invariantes Operatorios. Los invariantes operatorios son los conceptos y teoremas en acto que el sujeto pone en juego de forma explícita o implícita, determinan las diferencias entre los esquemas, tienen la función de reconocer y de identificar los objetos, sus relaciones, sus propiedades y sus transformaciones, Otero et al., (2014), Los teoremas en acto pueden ser verdaderos o falsos y un concepto en acto se pueden asociar a diferentes teoremas en acto y son considerados por el sujeto como relevantes, estos invariantes operatorios no explícitos forman una parte fundamental dentro del esquema en la conceptualización del sujeto, aunque no solo pueden ser explícitos o implícitos también pueden ser inconscientes, explicitables y formalizados.

3.1.4 Campos Conceptuales. Vergnaud (1990) define los campos conceptuales como un conjunto estructurado de clases de situaciones, también como un conjunto de problemas y situaciones para los cuales es necesario utilizar conceptos, procedimientos y representaciones de diferentes tipos pero íntimamente relacionadas.

Señala la obligación de analizar el saber-hacer, es decir que tan competente es el alumno y el saber-expresado, es decir, los conceptos explícitos o implícitos que se reflejan en sus competencias y en las cuales los invariantes conceptuales, es decir, los conceptos y preámbulos matemáticos, se estructuran en esquemas, para trabajar como promotor de la conducta y su actividad mental.

En un alumno se estudia su desarrollo cognitivo, sus dificultades en procedimientos matemáticos, su desarrollo en la simbolización matemática, si sus acciones dependen de sus saberes implícitos o explícitos.

La unión de tres conceptos: situaciones, invariantes y representaciones puede darse como la explicación del desarrollo cognitivo de las matemáticas, luego conocer conceptos y principios matemáticos que permiten comprender procedimientos, funcionalidad, representación y algoritmos se define como aprender matemáticas. Vergnaud (1990).

Los esquemas establecidos por los alumnos generan una mejor organización tanto en la forma comportamental como en la realización de procedimientos ante una situación, ya que al enfrentarse a ella, ellos aplican los pre saberes obtenidos, determinando su conveniencia y en el caso que no lo sea, ajustándola o descartándola para crear uno diferente.

La teoría de campos conceptuales es base de una evolución conceptual con respecto a estructuras definidas en matemáticas, sin embargo es de aclarar que no es exclusiva de esta área ya que se ocupa del aprendizaje y del desarrollo de competencias complejas en cualquier campo.

3.1.5 Concepto. Concepto en la *Teoría de Campos Conceptuales* es la unión de tres conjuntos, el primero es un conjunto de situaciones que le dan sentido al *concepto*, el segundo es el conjunto de invariantes los cuales son teoremas y conceptos en acto que pueden ser explícitos o implícitos, correctos o incorrectos dando operacionalidad a los esquemas permitiendo dar significado al *concepto*, el tercero son los sistemas de representación o el *significante*, es importante tener claro el concepto de conceptualización la cual es identificación de los objetos del mundo, de sus propiedades, de sus relaciones y transformaciones, Otero et al., (2014).

4. METODOLOGÍA

4.1 ESTRATEGIAS UTILIZADAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Las situaciones sugeridas para el desarrollo de este trabajo fueron construidas con el objetivo de desarrollar el concepto de función de dos o más variables. Estas fueron propuestas en su línea profesional a un grupo de 17 estudiantes de Administración ambiental que consistía en resolverlas con la disponibilidad de buscar toda la ayuda necesaria en la red, graficadores online, Excel o cualquier otro tipo herramienta que les facilite para tal fin; y a quienes al momento de la aplicación solo tienen conocimientos de matemática básica, de cálculo univariado o matemáticas I como la funciones de una variable, limites, continuidad, derivadas ordinarias de funciones de una variable; con esta investigación se quiere analizar las estrategias cognitivas que aplica este grupo de estudiantes de 3 semestre de universidad al resolver problemas en los que intervienen funciones con dos variables simples y sus gráficas. Luego de trabajar por parte de los estudiantes la situación 1 y 2 se hicieron dos intervenciones: una de ellas general de forma magistral sin tanto detalle a modo de recordar algunos conceptos de función en una variable e irlos introduciendo a las funciones de dos variables por parte del docente titular de la asignatura y la otra con ejemplos clásicos de función de dos variables que fueron enviados al mail de cada uno de ellos.

En el desarrollo de nuestro estudio se tomó como población finita la universidad de Ibagué con un número total de 7800 estudiantes, dentro de esta, tenemos la facultad de administración y entre sus carreras encontramos Administración ambiental que tiene en su plan de estudios curso de matemáticas I, Matemáticas II, y Matemáticas III. Para el desarrollo del estudio de caso planteado fue necesario pensar en que la muestra es estratificada y cada uno de ellos corresponde a los cursos ofrecidos de matemáticas II para el semestre B-2016. Se oferto un solo curso que correspondía a un estrato ya que las características particulares de la muestra (individuos diferentes, diferencia de edades, repitentes de curso, entre otras) determinaban que la conceptualización de un muestreo estratificado era la aplicación más apropiado para esta investigación.

La muestra seleccionada llevaba consigo una validación previa de requisitos particulares que debían cumplir, para que el estudio de este pudiese tener viabilidad y se pudiera efectuar cada una de las etapas en la construcción del conocimiento, como se ha venido describiendo a lo largo de este documento.

Las características que debía tener la muestra eran: un curso de matemáticas I aprobado y de ser posible que el desarrollo temático y las situaciones sugeridas llevaran direccionamiento a la línea de formación profesional de los estudiantes.
El espacio muestra o muestra para el desarrollo de nuestro estudio de investigación está conformado por 17 estudiantes (que previamente dieron su consentimiento para la aplicación de este estudio), de 3 semestre de Administración ambiental perteneciente a la facultad de administración de la universidad de Ibagué.

Descripción Del Cuestionario. El cuestionario utilizado se presenta como **anexo A**. Y se compone de 5 situaciones de funciones en dos variables simples.

4.2 ESTRATEGIAS GENERALES EMPLEADAS POR LOS ALUMNOS.

Es importante tener en cuenta que no solo para la resolución de problemas de varias variables sino en cualquier situación en cualquier rama, es fundamental poder traducir todo lo que se plantee en forma de nuevos problemas que sugieran un procedimiento más simple y fácil de solucionar; esto es, identificar las variables y plantearlas de acuerdo al contexto y conceptos previos de funciones, tal como lo señala Pérez & Raquel (2011):

> Es más productivo trabajar en clase con “problemas genuinos”, los cuales exigen un análisis detallado para definir la incógnita, identificar los datos necesarios y decidir la estrategia a seguir para llegar a su resolución. Según el mismo autor, en este tipo de problema, la incógnita puede no estar

> identificada con claridad, lo que exige hacer un análisis para captar con exactitud el objetivo del mismo, de manera que el estudiante examine cuidadosamente la información que debe desechar, los datos innecesarios e identificar lo realmente necesario. Además, en problemas como éstos, los estudiantes requieren pensar para elegir la estrategia de solución más eficaz, pues por sus características son factibles de aceptar diferentes vías de solución. (P. 7).

A continuación analizamos si el alumno ha utilizado estrategias o invariantes operatorios (correctos o incorrectos) en la resolución de estas situaciones de funciones en dos variables que establece el cuestionario. Para analizar estos procedimientos, hemos tenido en cuenta todas las soluciones planteadas por cada uno de los estudiantes, que se agruparon teniendo en cuenta razonamientos homogéneos que fuesen correctos o incorrectos. A cada situación la denominaremos con la letra S acompañada con el número de la situación correspondiente y los alumnos los denominaremos con la letra E acompañado con el número del grupo homogéneo de respuestas. En continuidad con lo anterior procedemos a nuestros resultados:

4.2.1 Situación 1. Una empresa de reciclaje de polietileno de baja y alta densidad, compra los empaques plásticos de segunda a un mismo precio sin importar que tipo de plástico sea y por medio de un proceso industrial los convierte en pellet, el cual es vendido en Kg para la fabricación de nuevos empaques plásticos.

El proceso industrial demanda el alquiler de una bodega en el sector industrial de la ciudad y la contratación de tres operarios.

El contador de la empresa realiza un resumen de todos los costos cada fin de mes como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 1. Resumen de costos sede principal.

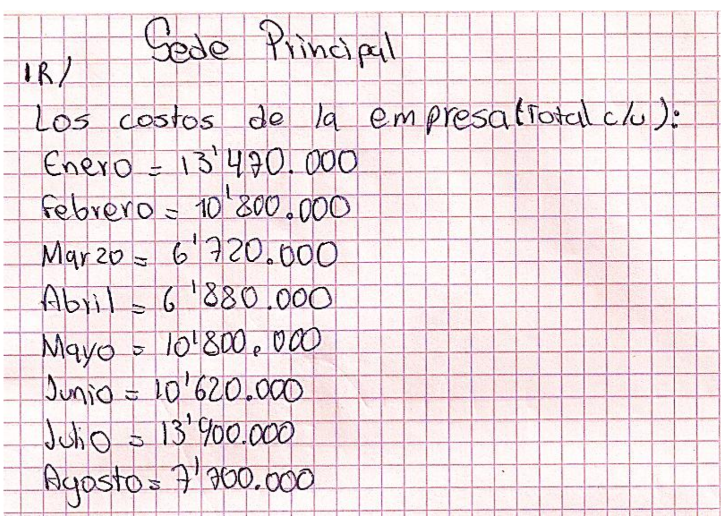
Sede: Principal	Kg procesados de Baja densidad	Kg procesados de alta densidad	Costos de Compra de plástico usado	Costos industriales del proceso para Baja densidad	Costos industriales del proceso para Alta densidad	Alquiler de Bodega	Pago Nomina
Enero	2500	4200	4020000	2250000	4200000	1000000	2000000
Febrero	2000	3000	3000000	1800000	3000000	1000000	2000000
Marzo	1400	1000	1440000	1260000	1000000	1000000	2000000
Abril	1200	1300	1500000	1080000	1300000	1000000	2000000
Mayo	2000	3000	3000000	1800000	3000000	1000000	2000000
Junio	2200	2700	2940000	1980000	2700000	1000000	2000000
Julio	3000	4000	4200000	2700000	4000000	1000000	2000000
Agosto	1000	2000	1800000	900000	2000000	1000000	2000000

I. ¿Cuáles son los costos de la empresa?

II. ¿Cómo puede mostrar gráficamente el comportamiento de los costos y explicarlos a la junta directiva de la empresa?

4.2.1.1 Tipo de respuesta 1 de la pregunta I. Resolución del E1.

Figura 1: S1, PI, E1.



Sede Principal
1R/
Los costos de la empresa (Total c/u):
Enero = 13'470.000
Febrero = 10'800.000
Marzo = 6'720.000
Abril = 6'880.000
Mayo = 10'800.000
Junio = 10'620.000
Julio = 13'900.000
Agosto = 7'700.000

Fuente: El autor.

4.2.1.2 Tipo De Respuesta 2 De La Pregunta I. Resolución del E2.

Figura 2. S1, PI, E2.

Para toda la empresa
x Polietileno de baja (Kg)

Compra de equipos
bodega (alquiler
obrero
"sede principal"

f(x,y) = 600 (x + y) + 900x + 1000y + 1'000.000 + 2'000.000
F(x,y) = 600x + 600y + 900x + 1000y + 3'000.000
f(x,y) = 1500x + 1600y + 3'000 000

600 (x + y) la deduje de sumar la Kg de baja y alta densidad, este resultado lo dividi entre el costo de compra; puesto que se compran al mismo precio.

1 los costos de la empresa
Enero
F(2,500,4200) = 1500(2500) + 1600(4200) + 3'000 000
= 3750,000 + 6'720,000 + 3'000 000
= 13'470.000 =

Febrero
f(2000,3000) = 1500(2000) + 1600(3000) + 3'000.000
= 3'000.000 + 4'800,000 + 3'000 000
= 10' 800.000 =

Marzo
F(1400,1000) = 1500(1400) + 1600(1000) + 3'000.000
= 2'100 000 + 1'600,000 + 3'000.000
= 6720.000

Abril
F(1200,1300) = 1500(1200) + 1600(1300) + 3'000.000
= 1'800,000 + 2080,000
= 6'880.000

Mayo
F(2000,3000) = 1500(2000) + 1600(3000) + 3'000.000
= 3'000.000 + 4'800.000
= 10'800 000

Junio
F(2200,2700) = 1500(2200) + 1600(2700) + 3'000.000
= 3'300.000 + 4'320.000 + 3'000.000
= 10'620,000

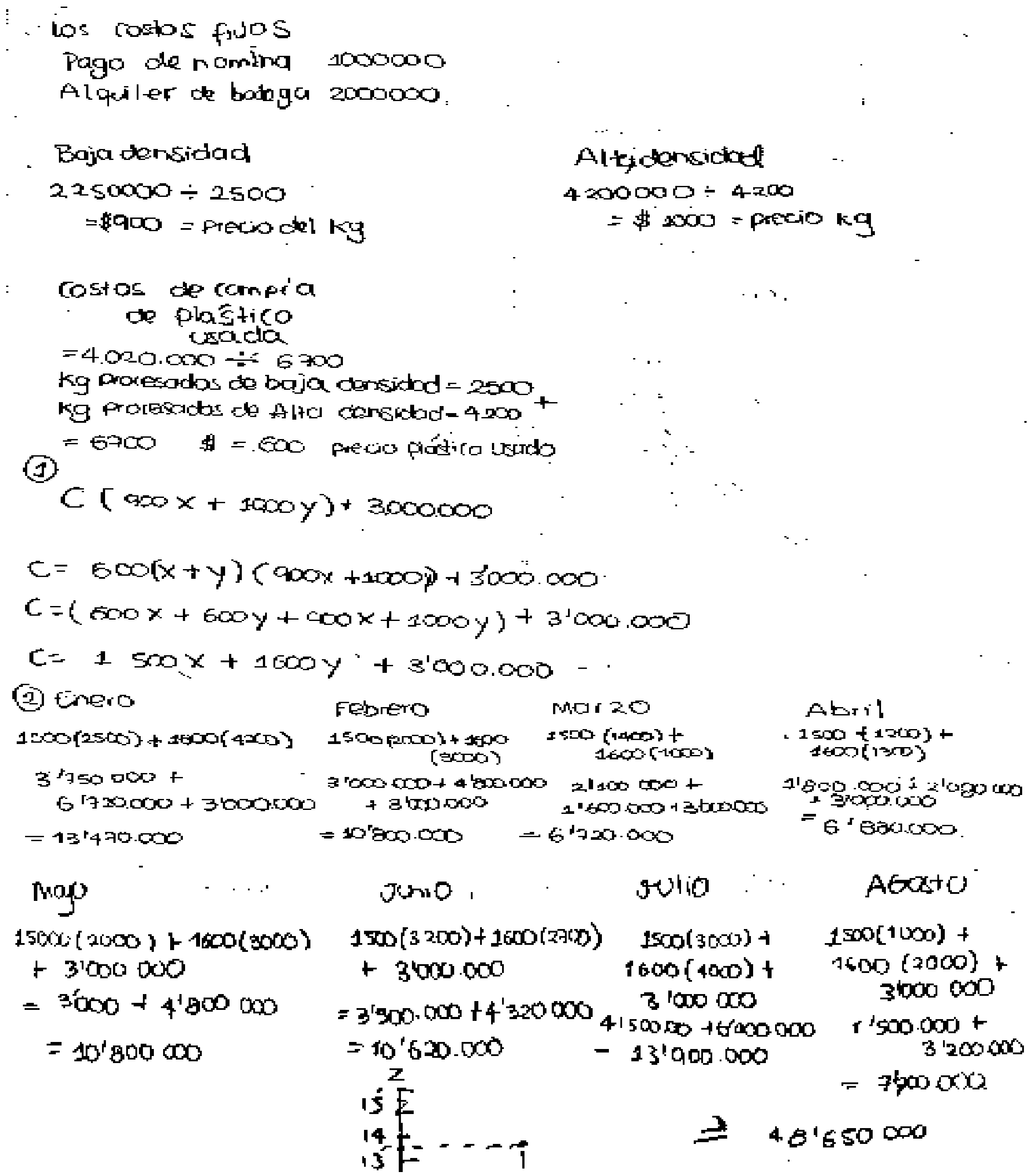
Julio
F(3000,4000) = 1500(3000) + 1600(4000) + 3'000.000
= 4'500.000 + 6'400.000 + 3'000.000
= 13'900.000

Agosto
F(1000,2000) = 1500(1000) + 1600(2000) + 3'000.000
= 1'500,000 + 3'200.000 + 3'000.000
= 4'7000,000

Fuente: El autor.

4.2.1.3 Tipo De Respuesta 3 De La Pregunta I. Resolución del E3.

Figura 3. S1, PI, E3.


los costos fijos
Pago de nomina 1000000
Alquiler de bodega 2000000

Baja densidad
2250000 ÷ 2500
=$900 = Precio del kg

Alta densidad
4200000 ÷ 4200
= $ 1000 = precio kg

Costos de compra de plástico usado
=4.020.000 ÷ 6700
kg Procesados de baja densidad = 2500
kg Procesados de Alta densidad = 4200 +
= 6700 $ = 600 precio plástico usado

(1)
C (900 x + 1000 y) + 3000000

C = 600(x + y) (900x + 1000y) + 3000.000
C = (600 x + 600 y + 900 x + 1000 y) + 3'000.000
C = 1 500 x + 1600 y + 3'000.000

(2) Enero
1500(2500) + 1600(4200)
3'750 000 +
6'720.000 + 3'000.000
= 13'470.000

Febrero
1500(2000) + 1600 (3000)
3'000.000 + 4'800.000
+ 3'000.000
= 10'800.000

Marzo
1500 (1400) +
1600 (1000)
2'100 000 +
1'600.000 + 3'000.000
= 6'720.000

Abril
1500 (1200) +
1600 (1300)
1'800.000 + 2'080.000
+ 3'000.000
= 6'880.000

Mayo
1500 (2000) + 1600(3000)
+ 3'000 000
= 3'000 + 4'800 000
= 10'800 000

Junio
1500(3200) + 1600(2700)
+ 3'000.000
= 3'500.000 + 4'320 000
= 10'620.000

Julio
1500(3000) +
1600 (4000) +
3'000 000
4'500.000 + 6'400.000
= 13'900.000

Agosto
1500(1000) +
1600 (2000) +
3'000 000
1'500.000 +
3'200.000
= 7'700.000

z
15
14
13

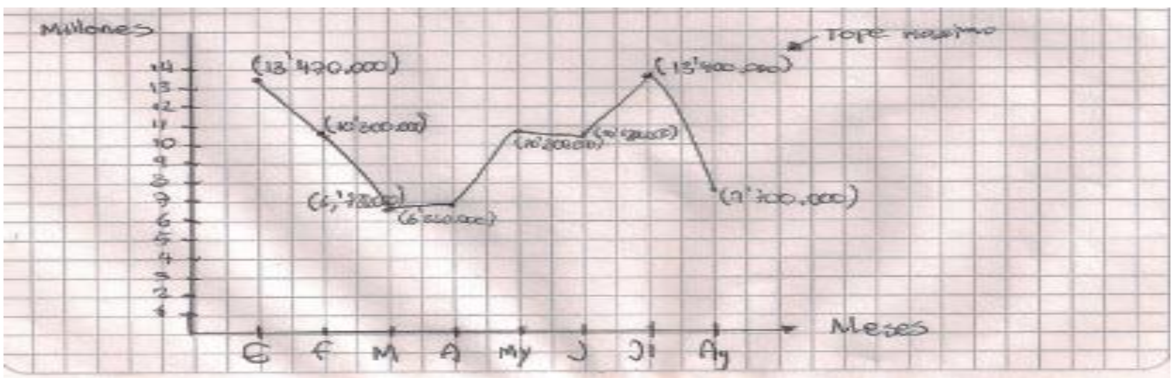
⇒ 48'650 000

Fuente: El autor.

Los estudiantes generan algunos conceptos incorrectos haciendo análisis que para ellos son claramente ciertos, determinan e identifican que es una situación compleja y definen para ellos unas tareas específicas, esto puede ocurrir en un principio por la no comprensión de la pregunta; entienden por costos de una empresa la información dada pero no analizan la posibilidad de generar los costos generales no solo para los meses dados sino para cualquier mes. Aunque determinaron que ya no existe una sola variable, sino dos, luego se genera una duda en el proceso de establecer una función. Sin embargo, a partir de este análisis empieza una estrategia de solución que determina una situación a las que se refiere Vergnaud (1990) en su clasificación.

4.2.1.4 Tipo De Respuesta 1 De La Pregunta II. Resolución del E1.

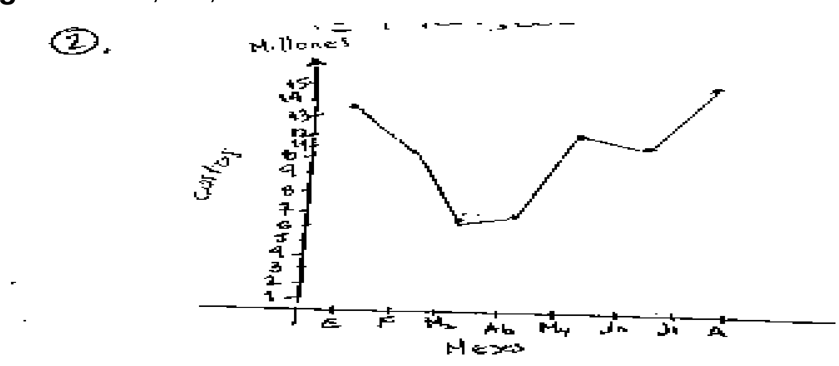
Figura 4. S1, PII, E1.



Fuente: El autor.

4.2.1.5 Tipo De Respuesta 2 De La Pregunta II. Resolución del E2.

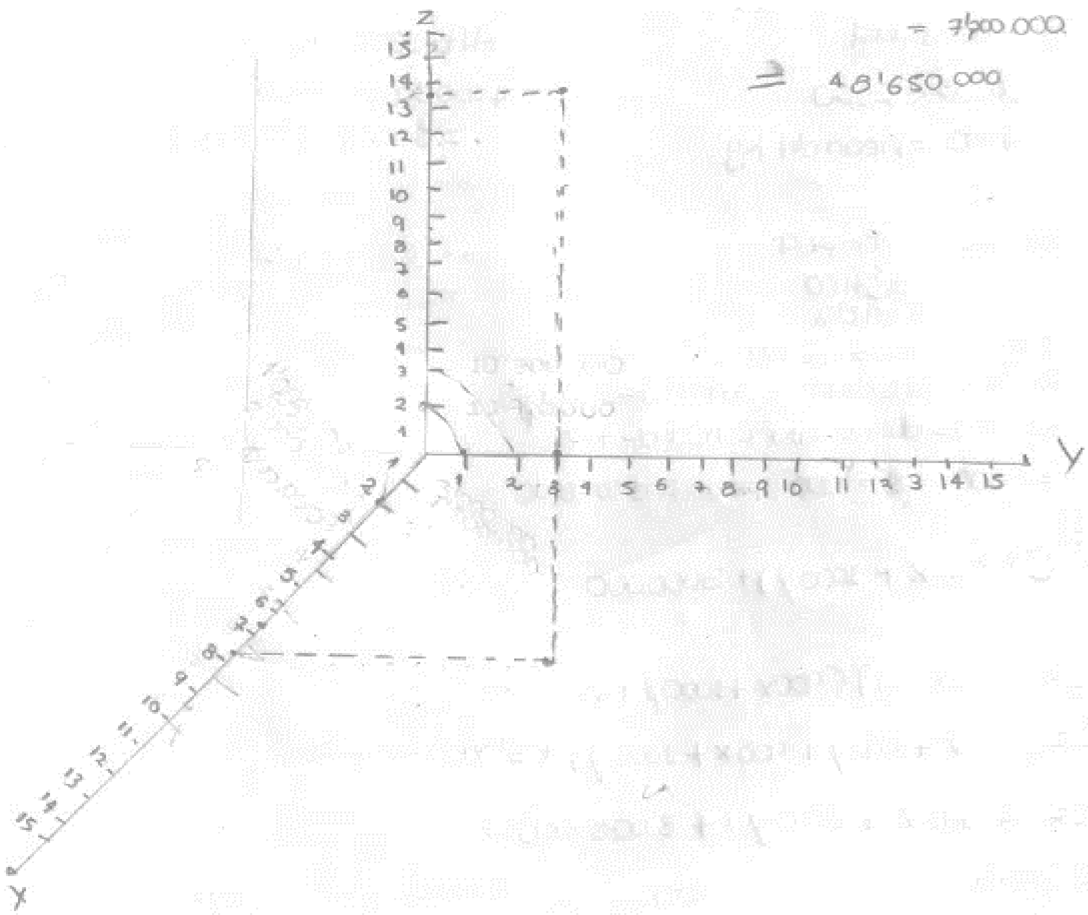
Figura 5: S1, PII, E2.



Fuente: El autor.

4.2.1.6 Tipo De Respuesta 3 De La Pregunta II. Resolución del E3.

Figura 6. *S1, PII, E3.*



Fuente: El autor.

Los estudiantes aunque tienen un conocimiento previo de cálculo y un curso de fundamentos de matemática, determinan reglas de acción de los esquemas que plantean, es decir, entienden que las funciones se pueden graficar, pero solo algunos determinaron que evidentemente la gráfica se salía de su conocimiento porque aunque sabían que existen planos en 3 dimensiones, no tienen el conocimiento suficiente para generar una gráfica de este tipo. Algunos estudiantes (como fue la instrucción inicial) buscaron graficadores en la red para poder determinar la gráfica de la función que habían generado, mientras los otros que no pudieron determinar las dos variables simplemente graficaron en un plano en dos dimensiones los costos obtenidos.

4.2.2 Situación 2. La empresa necesita vender una de sus tres sedes en el país y la junta directiva desea tomar su decisión basados únicamente en los costos, para ello el gerente realiza un resumen de los costos durante varios meses, los cuales se encuentran en las siguientes tablas:

Tabla 2. Resumen costos, sede 2.

Sede 2	Kg procesados de Baja densidad	Kg procesados de alta densidad	Costos de Compra de plástico usado	Costos industriales del proceso para Baja densidad	Costos industriales del proceso para Alta densidad	Alquiler de Bodega	Pago Nomina
Mes 1	2500	4200	3685000	2000000	4830000	800000	2000000
Mes 2	2000	3000	2750000	1600000	3450000	800000	2000000
Mes 3	1400	1000	1320000	1120000	1150000	800000	2000000
Mes 4	1200	1300	1375000	960000	1495000	800000	2000000
Mes 5	2000	3000	2750000	1600000	3450000	800000	2000000

Tabla 3. Resumen costos sede 3.

Sede 3	**Kg procesados de Baja densidad**	**Kg procesados de alta densidad**	**Costos de Compra de plástico**	**Costos industriales del proceso para Baja densidad**	**Costos industriales del proceso para Alta densidad**	**Alquiler de Bodega**	**Pago Nomina**
Mes 1	2500	4200	4690000	2375000	4620000	0	2500000
Mes 2	2000	3000	3500000	1900000	3300000	0	2500000
Mes 3	1400	1000	1680000	1330000	1100000	0	2500000
Mes 4	1200	1300	1750000	1140000	1430000	0	2500000
Mes 5	2000	3000	3500000	1900000	3300000	0	2500000

La junta directiva le recomienda al gerente seguir las siguientes sugerencias:

I. Encontrar los costos para cada una de las sedes.

II. Realizar una gráfica donde se puedan observar todos los costos de cada una de las sedes e interpretarla.

III. Plantear un modelo que se pueda ajustar dependiendo de las características de los costos para cada una de las sedes o de cualquier empresa con iguales características.

IV. ¿Cómo sería el informe del gerente y cuál sería su recomendación a la junta directiva?

45.2.2.1 Tipo De Respuesta 1 De La Pregunta I. Resolución del E1.

Figura 7: S2, PI, E1.

"SEDE 2" Pag 3

$f(x,y) = 550(x+y) + 800x + 1150y + 2'800.000$

$= 550x + 550y + 800x + 1150y + 2'800000$

$f(x,y) = 1350x + 1700y + 2'800.000$

Al dividir los costos de compra (por ser al mismo precio) entre la suma de los Kg procesados de baja y alta densidad, da 550. Por lo tanto quedaría $550(x+y)$

Mes 1 (Enero)

$f(2500, 4200) = 1350(2500) + 1700(4200) + 2'800.000$

$= 3375.000 + 7'140.000 + 2'800.000$

$= 13'315.000$

Mes 2 (Febrero)

$f(2000, 3000) = 1350(2000) + 1700(3000) + 2'800.000$

$= 2'700.000 + 5'100.000 + 2'800.000$

$= 10'600.000$

Mes 3 (Marzo)

$f(1400, 1000) = 1350(1400) + 1700(1000) + 2'800.000$

$= 1'890.000 + 1'700.000 + 2'800.000$

$= 6'390.000$

Mes 4 (Abril)

$f(1200, 1300) = 1350(1200) + 1700(1300) + 2'800.000$

$= 1'620.000 + 2'210.000 + 2'800.000$

$= 6'630.000$

Mes 5 (Mayo)

$f(2000, 3000) = 1350(2000) + 1700(3000) + 2'800.000$

$= 2'700000 + 5'100.000 + 2'800.000$

$= 10'600.000$

"SEDE 3"

$f(x,y) = 700(x+y) + 950x + 1100y + 2'500.000$

$= 700x + 700y + 950x + 1100y + 2'500.000$

$f(x,y) = 1650x + 1800y + 2'500.000$

$700(x+y)$ lo obtuve de dividir los costos de compra entre la suma entre los kgs, porque se compran al mismo precio

Mes 1 (Enero)

$f(2500, 4200) = 1650(2500) + 1800(4200) + 2'500.000$

$= 4'125.000 + 7'560.000 + 2'500.000$

$= 14'185.000$

Mes 2 (Febrero)

$f(2000, 3000) = 1650(2000) + 1800(3000) + 2'500.000$

$= 3'300.000 + 5'400.000 + 2'500.000$

$= 11'200.000$

Mes 3 (Marzo)

$f(1400, 1000) = 1650(1400) + 1800(1000) + 2'500.000$

$= 2'310.000 + 1'800.000 + 2'500.000$

$= 6'610.000$

Mes 4 (Abril)

$f(1200, 1300) = 1650(1200) + 1800(1300) + 2'500.000$

$= 1'980.000 + 2'340.000 + 2'500.000$

$= 6'820.000$

Mes 5 (Mayo)

$f(2000, 3000) = 1650(2000) + 1800(3000) + 2'500.000$

$= 3'300.000 + 5'400.000 + 2'500.000$

$= 11'200.000$

• Costos de cada Sede

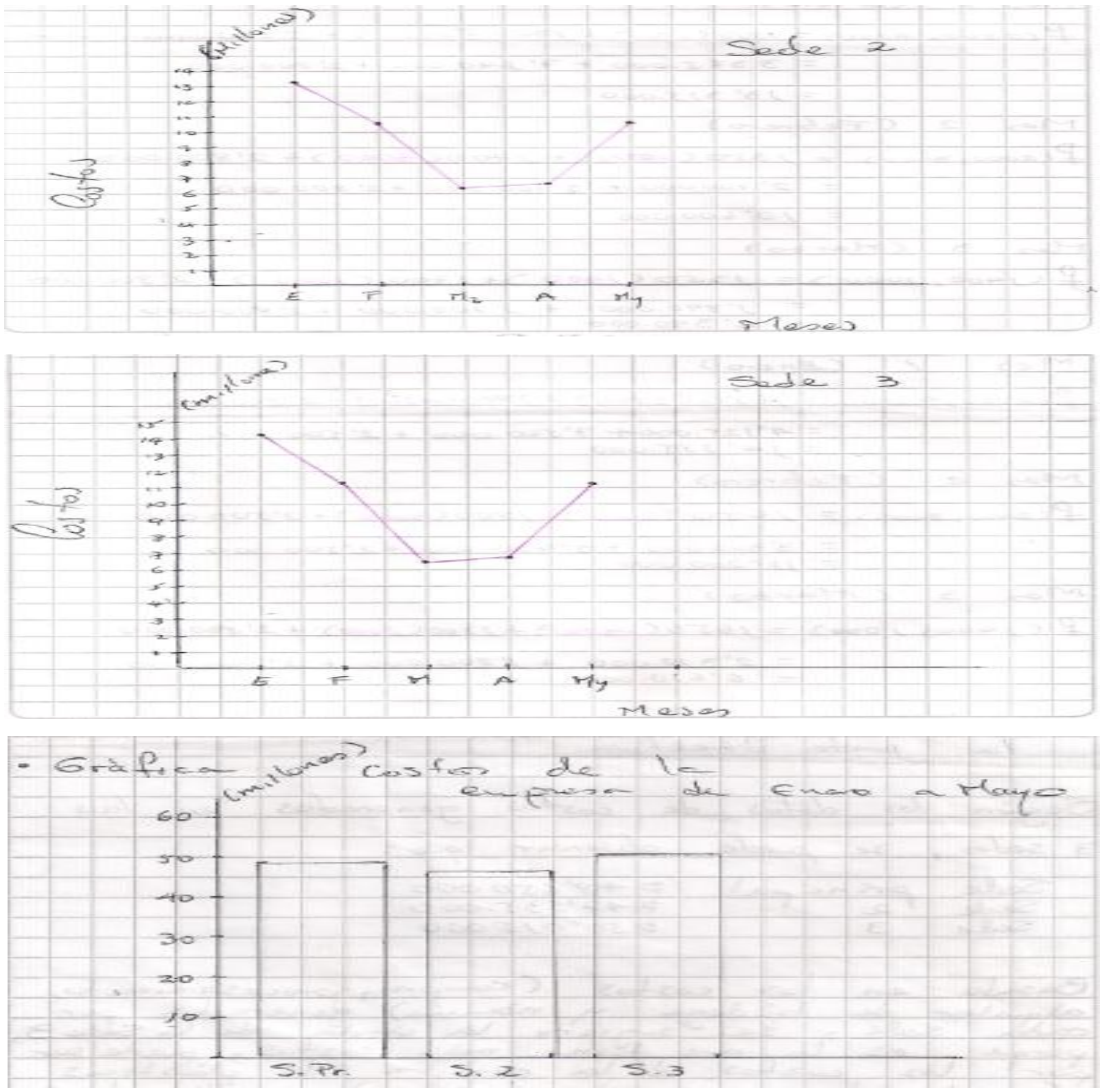
	Sede Principal	Sede 2	Sede 3
Enero	13'470.000	13'315.000	14'185.000
Febrero	10'800.000	10'600.000	11'200.000
Mzo	6'700.000	6'390.000	6'610.000
Abril	6'880.000	6'630.000	6'820.000
Mayo	10'800.000	10'600.000	11'200.000
Total $	48'650.000	47'535.000	50'015.000

Fuente: El autor.

Los estudiantes repitieron procesos de la situación 1 porque la pregunta así lo solicitaba, pero cometieron los mismos errores del primer proceso al establecer los costos con una sola variable y no se dedicaron a analizar mediante esta pregunta si la anterior era correcta. Estos invariantes operatorios implícitos generaron una conceptualización que no es la esperada, ya que el esquema seguido por parte de los estudiantes que no tienen las competencias para desarrollarlo no determino una solución a la pregunta.

4.2.2.2 Tipo De Respuesta 1 De La Pregunta II. Resolución del E1.

Figura 8: S2, PII, E1.

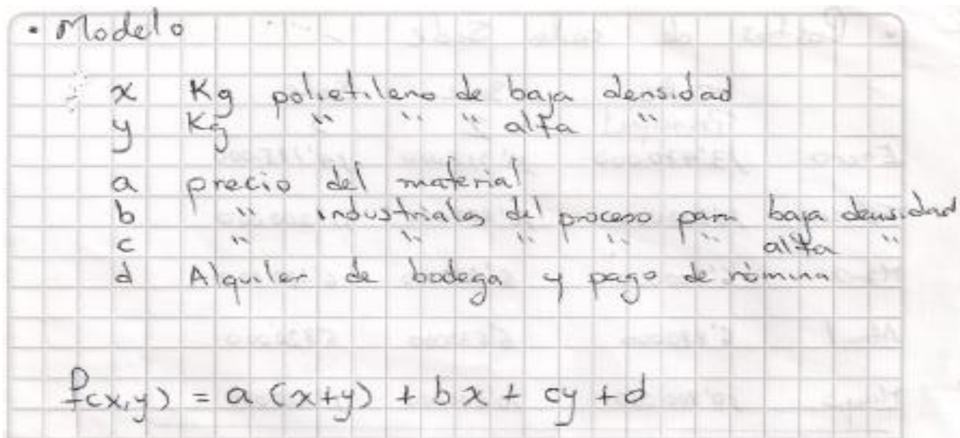


Fuente: El autor.

Como teoremas de acto para la consecución de un campo conceptual es válido, pero no suficiente para la construcción de la teoría que se requería, es decir, os estudiantes tienen conceptos claros de funciones en una sola variable, pero les cuesta dentro de sus conceptos generar graficas de funciones de 3 variables, sin embargo el análisis que hacen de los costos es correcto en algunos casos.

4.2.2.3 Tipo De Respuesta 1 De La Pregunta III. Resolución del E1.

Figura 9: S2, PIII, E1.



• Modelo

x Kg polietileno de baja densidad
y Kg " " " alfa "
a precio del material
b " industriales del proceso para baja densidad
c " " " " alfa "
d Alquiler de bodega y pago de nómina

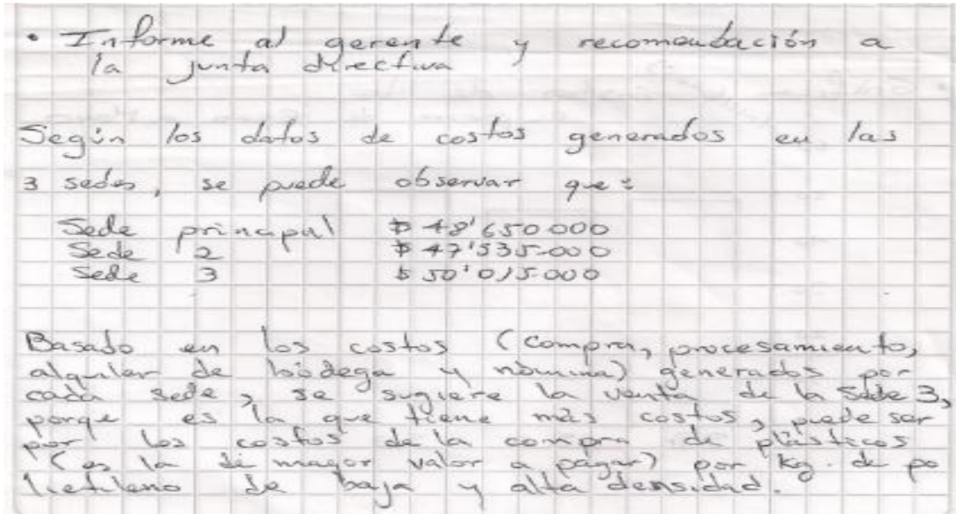
$f(x,y) = a(x+y) + bx + cy + d$

Fuente: El autor.

Las posibilidades de inferencia determinan una solución rápida por parte de los estudiantes, ya que ellos en algunos casos, construyen un esquema aplicando inducción matemática a partir de casos particulares, aunque no es una demostración del todo correcta hacen las conjeturas necesarias para determinar esto; aunque desconocen que los modelos deben ser válidos para todas las empresas que estén siendo objeto del análisis.

4.2.2.4 Tipo De Respuesta 1 De La Pregunta IV. Resolución del E1.

Figura 10: S2, PIV, E1.


• Informe al gerente y recomendación a la junta directiva

Según los datos de costos generados en las 3 sedes, se puede observar que:

Sede principal		$48'650 000
Sede	2	$47'535-000
Sede	3	$50'015-000

Basado en los costos (compra, procesamiento, alquiler de bódega y nómina) generados por cada sede, se sugiere la venta de la Sede 3, porque es la que tiene más costos, puede ser por los costos de la compra de plásticos (es la de mayor valor a pagar) por kg. de polietileno de baja y alta densidad.

Fuente: El autor.

Algunos estudiantes determinaron que la mejor forma de analizar y dar un informe a la junta directiva es por el comportamiento que tuvo cada empresa durante el periodo de tiempo dado en la información que suministro el gerente; y desde ese punto el análisis es real pero no es el solicitado, los conceptos de acto funcionan pero no para alcanzar estas submetas, ya que se tiene que inducir a partir de estos meses lo que se podría presentar de forma general; pero cabe aclarar que los estudiantes tienen claro que el informe debe ser a partir de los resultados obtenidos, recomendando la sede que tenga mejores números con respecto a las otras, esto es, a partir de lo que se pregunta se debe organizar los esquemas correctos para la situación.

4.2.3 Situación 3. La empresa desea estabilizar los costos en cada una de sus sedes, pero necesita tener la información suficiente sobre la cantidad de kg que puede comprar y producir con diferentes posibles cantidades de dinero.

I. ¿Qué cantidad de kg puede comprar y producir si los costos deben ser de $5\ millones$, $7\ millones$, $10\ millones$ o $k\ millones$?

a. Representar todos los casos en una gráfica y para cada una de las sedes de la empresa.

II. ¿Si necesitamos producir 1200 kg o 1800 kg de polietileno de baja densidad, qué opciones tengo para los costos y cantidad de kg de polietileno de alta densidad?

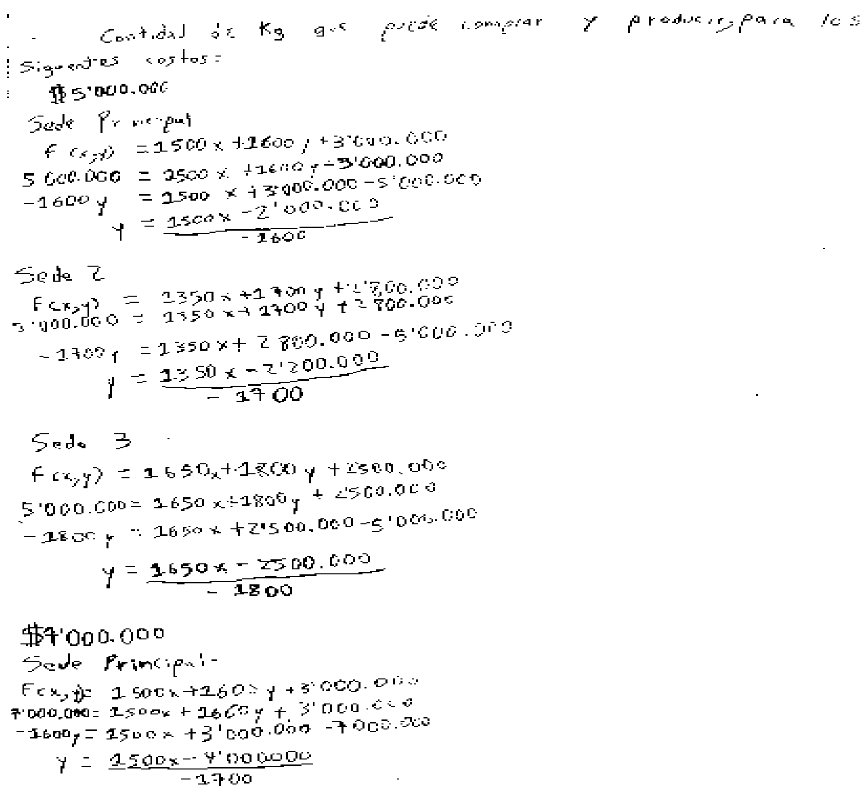
a. Representar por medio de una gráfica y para cada sede de la empresa.

III. ¿Si necesitamos producir 1000 kg o 2000 kg de alta densidad, que opciones se tiene para los costos y cantidad de polietileno de baja densidad?

a. Representar por medio de un gráfico y para cada sede de la empresa.

4.2.3.1 Tipo De Respuesta 1 De La Pregunta I. Resolución del E1.

Figura 11: S3, PI, E1.



Cantidad de Kg que puede comprar y producir, para los siguientes costos:

\$5'000.000

Sede Principal

$f(x,y) = 1500x + 1600y + 3'000.000$

$5'000.000 = 1500x + 1600y + 3'000.000$

$-1600y = 1500x + 3'000.000 - 5'000.000$

$y = \dfrac{1500x - 2'000.000}{-1600}$

Sede 2

$f(x,y) = 1350x + 1700y + 2'800.000$

$5'000.000 = 1350x + 1700y + 2'800.000$

$-1700y = 1350x + 2'800.000 - 5'000.000$

$y = \dfrac{1350x - 2'200.000}{-1700}$

Sede 3

$f(x,y) = 1650x + 1800y + 2'500.000$

$5'000.000 = 1650x + 1800y + 2'500.000$

$-1800y = 1650x + 2'500.000 - 5'000.000$

$y = \dfrac{1650x - 2'500.000}{-1800}$

\$7'000.000

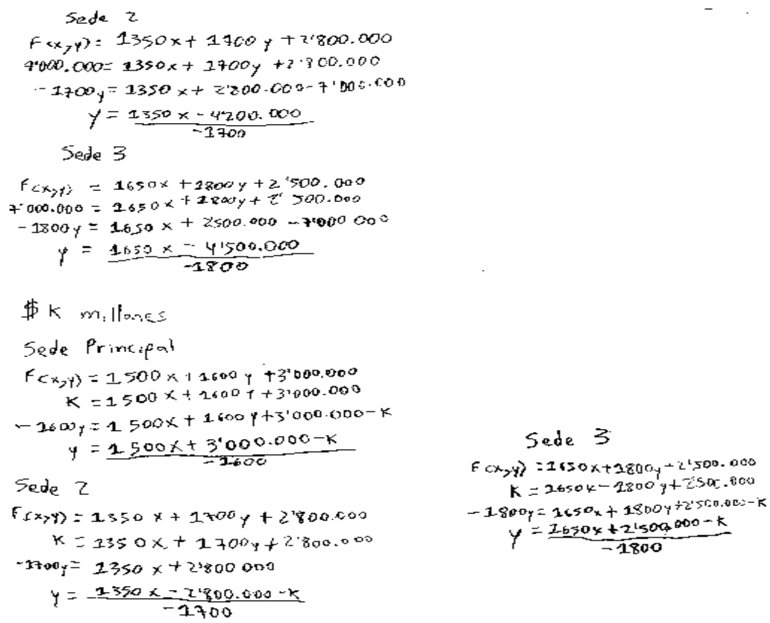
Sede Principal

$f(x,y) = 1500x + 1600y + 3'000.000$

$7'000.000 = 1500x + 1600y + 3'000.000$

$-1600y = 1500x + 3'000.000 - 7'000.000$

$y = \dfrac{1500x - 4'000000}{-1700}$



Sede 2
F(x,y): 1350x + 1700y + 2'800.000
7'000.000 = 1350x + 1700y + 2'800.000
-1700y = 1350x + 2'800.000 - 7'000.000
$y = \frac{1350x - 4'200.000}{-1700}$

Sede 3
F(x,y) = 1650x + 1800y + 2'500.000
7'000.000 = 1650x + 1800y + 2'500.000
-1800y = 1650x + 2500.000 - 7'000.000
$y = \frac{1650x - 4'500.000}{-1800}$

$K millones

Sede Principal
F(x,y) = 1500x + 1600y + 3'000.000
K = 1500x + 1600y + 3'000.000
-1600y = 1500x + 1600y + 3'000.000 - K
$y = \frac{1500x + 3'000.000 - K}{-1600}$

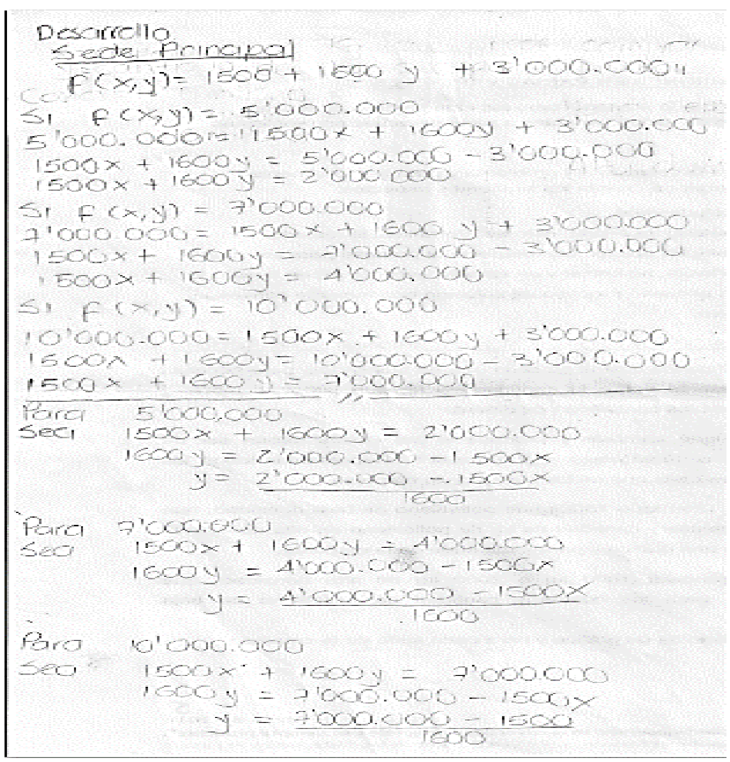
Sede 2
F(x,y) = 1350x + 1700y + 2'800.000
K = 1350x + 1700y + 2'800.000
-1700y = 1350x + 2'800.000
$y = \frac{1350x - 2'800.000 - K}{-1700}$

Sede 3
F(x,y) = 1650x + 1800y + 2'500.000
K = 1650x - 1800y + 2'500.000
-1800y = 1650x + 1800y + 2'500.000 - K
$y = \frac{1650x + 2'500.000 - K}{-1800}$

Fuente: El autor.

4.2.3.2 Tipo De Respuesta 2 De La Pregunta I. Resolución del E2.

Figura 12: S3, PI, E2.

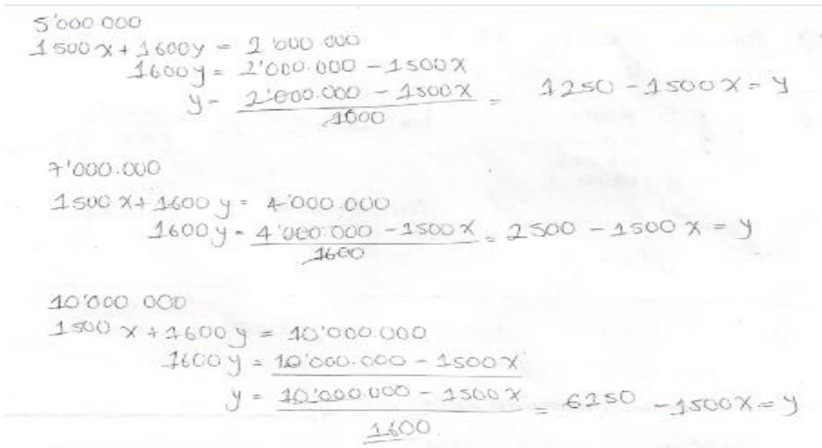


Desarrollo
Sede Principal
F(x,y) = 1500 + 1600 y + 3'000.000
Si F(x,y) = 5'000.000
5'000.000 = 1500x + 1600y + 3'000.000
1500x + 1600y = 5'000.000 - 3'000.000
1500x + 1600y = 2'000.000
Si F(x,y) = 7'000.000
7'000.000 = 1500x + 1600y + 3'000.000
1500x + 1600y = 7'000.000 - 3'000.000
1500x + 1600y = 4'000.000
Si F(x,y) = 10'000.000
10'000.000 = 1500x + 1600y + 3'000.000
1500x + 1600y = 10'000.000 - 3'000.000
1500x + 1600y = 7'000.000
Para 5'000.000
Sea 1500x + 1600y = 2'000.000
1600y = 2'000.000 - 1500x
$y = \frac{2'000.000 - 1500x}{1600}$
Para 7'000.000
Sea 1500x + 1600y = 4'000.000
1600y = 4'000.000 - 1500x
$y = \frac{4'000.000 - 1500x}{1600}$
Para 10'000.000
Sea 1500x + 1600y = 7'000.000
1600y = 7'000.000 - 1500x
$y = \frac{7'000.000 - 1500}{1600}$

Fuente: El autor.

4.2.3.3 Tipo De Respuesta 3 De La Pregunta I. Resolución del E3.

Figura 13: S3, PI, E3.

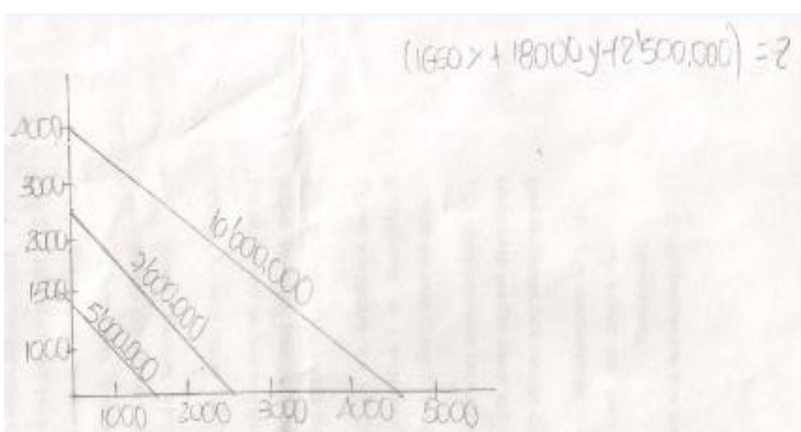


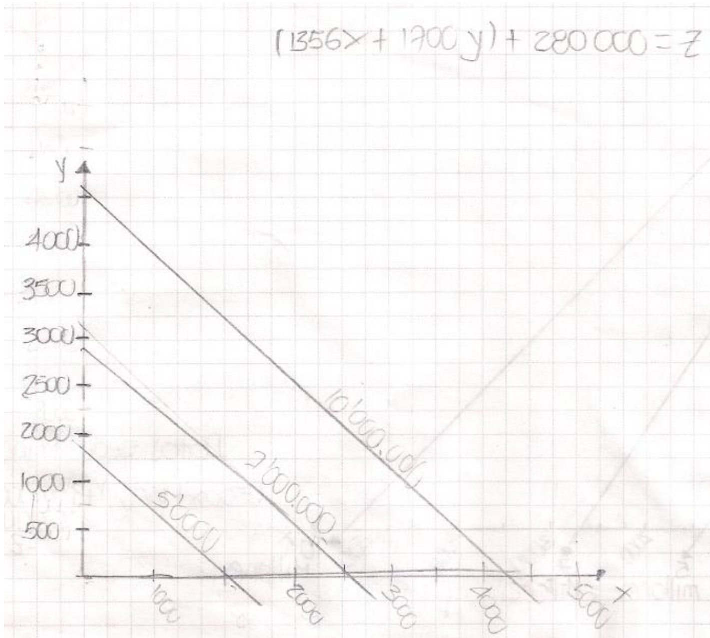
Fuente: El autor.

Los estudiantes entienden perfectamente el concepto de valor constante; además que aplican de la mejor manera la solución de ecuaciones determinando e identificando una función que conocen muy bien: Función Lineal. Este invariante operatorio funciona perfectamente para el campo conceptual, se tiene perfecto dominio del tema para abordar la situación. Aunque tienen dificultad nuevamente en la inducción a partir de casos particulares cuando se les pide que determinen para un valor $k\ millones$.

4.2.3.4 Tipo De Respuesta 1 De La Pregunta I.A. Resolución del E2.

Figura 14: S3, PI.A, E2.

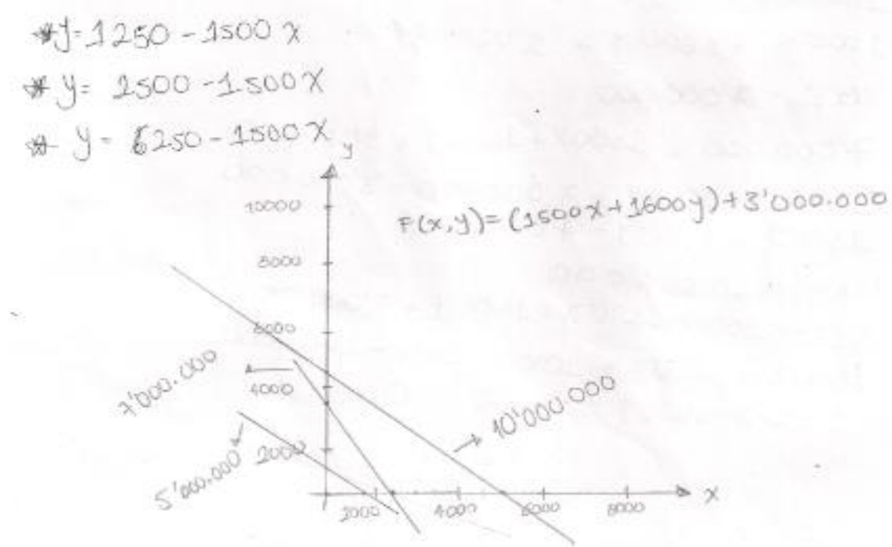




Fuente: El autor.

4.2.3.5 Tipo De Respuesta 2 De La Pregunta I.A. Resolución del E3.

Figura 15: S3, PI.A, E3.



Fuente: El autor.

Los estudiantes determinaron perfectamente que tipo de graficas tenían que hacer porque su conocimiento les da para ello, aunque en algunos casos al fallar con la solución de las ecuaciones entonces fallaban con el tipo de grafica; sin embargo el concepto de rectas paralelas, graficas de funciones lineales son claros para la mayoría. Los procesos anteriores vividos en cursos anteriores y sus aplicaciones hacen que las situaciones sean abordadas de una mejor manera, dando esto pasó a razonamientos inmediatos y sistemáticos que no dejan lugar a equivocaciones.

4.2.4 Situación 4. En la sede principal de la empresa se cuenta con la siguiente información sobre el precio por kg del polietileno de baja y alta densidad, según la cantidad de kg que se producen y venden al mes para algunos de sus clientes.

Tabla 4. Precio por Kg de polietileno de baja y alta densidad.

Kg	Precio de Venta Polietileno de Baja densidad por kg	Precio de Venta polietileno de Alta densidad por kg
10	2495	2597
500	2250	2450

Kg	Precio de Venta Polietileno de Baja densidad por kg	Precio de Venta polietileno de Alta densidad por kg
1000	2000	2300
1400	1800	2180
2100	1450	1970
2800	1100	1760
3000	1000	1700
4000	500	1400
4500	250	1250
5000	0	1100

La junta directiva considera que no solo se deben analizar los costos de la misma, sino también los ingresos y utilidades. Por lo anterior, la junta se hace los siguientes cuestionamientos, que debe dar solución el gerente y realizar una socialización en la próxima reunión.

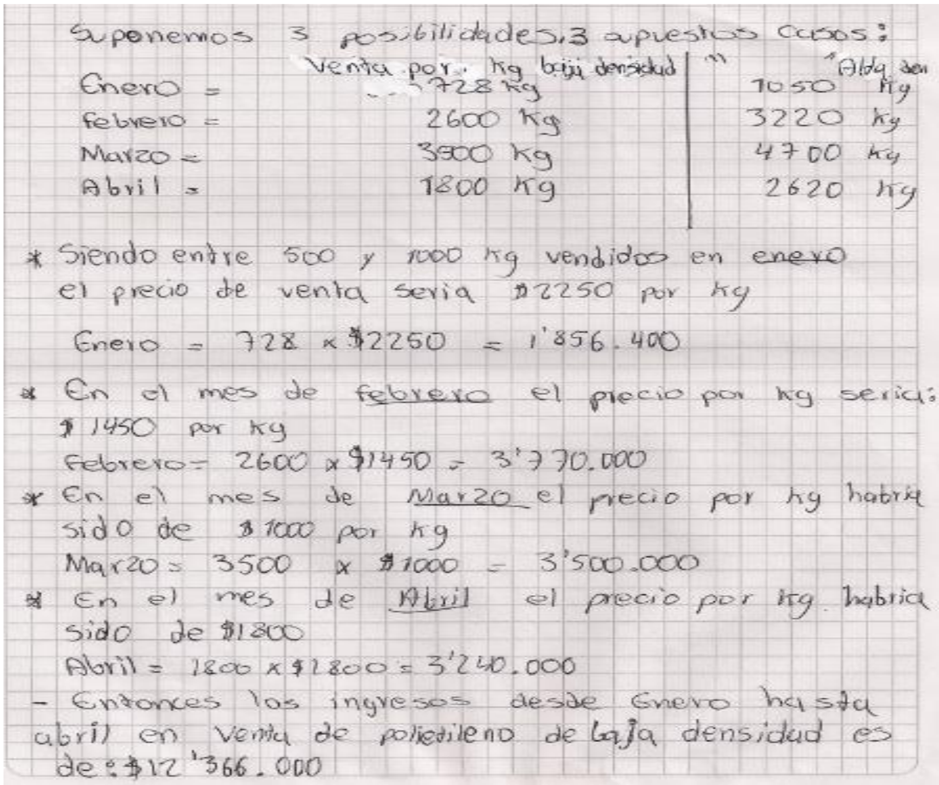
I. ¿Cómo son los ingresos y la utilidad de la sede principal de la empresa?

II. ¿Qué gráfica describe de manera visual el comportamiento de los ingresos y su interpretación?

III. ¿Qué gráfica describe de manera visual el comportamiento de las utilidades y su interpretación?

4.2.4.1 Tipo De Respuesta 1 De La Pregunta I. Resolución del E1.

Figura 16: S4, PI, E1.



Suponemos 3 posibilidades, 3 supuestos casos:

	Venta por kg baja densidad	Alta den
Enero =	728 kg	1050 kg
Febrero =	2600 kg	3220 kg
Marzo =	3500 kg	4700 kg
Abril =	1800 kg	2620 kg

* Siendo entre 500 y 1000 kg vendidos en enero el precio de venta seria $2250 por kg

Enero = 728 x $2250 = 1'856.400

* En el mes de febrero el precio por kg seria: $1450 por kg

Febrero = 2600 x $1450 = 3'770.000

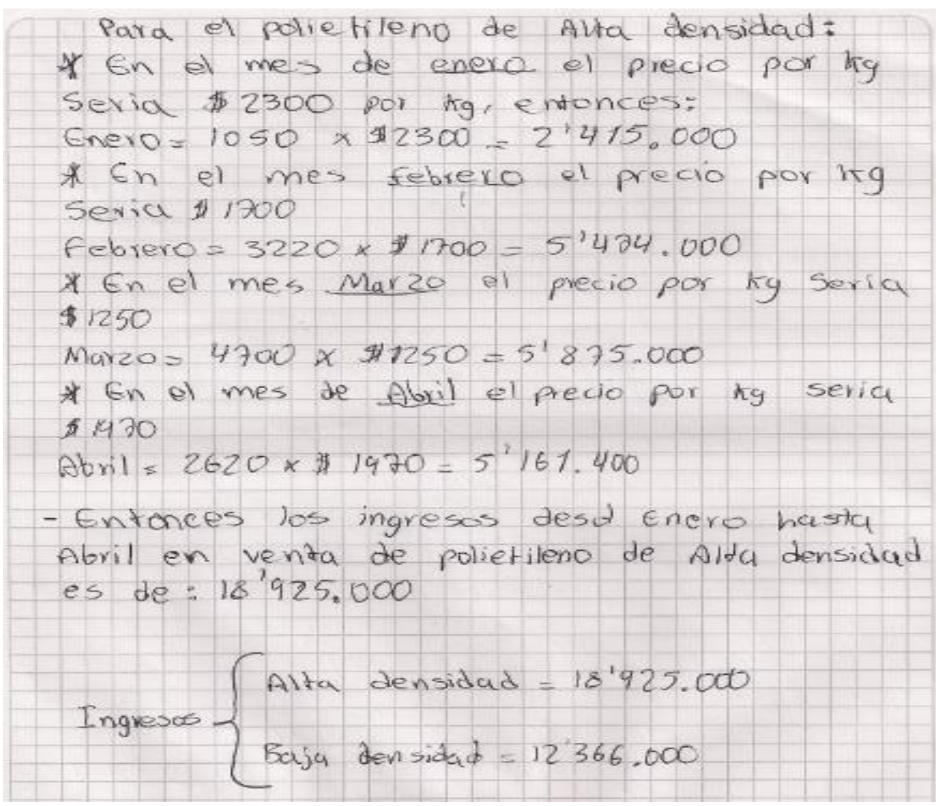
* En el mes de Marzo el precio por kg habria sido de $1000 por kg

Marzo = 3500 x $1000 = 3'500.000

* En el mes de Abril el precio por kg habria sido de $1800

Abril = 1800 x $1800 = 3'240.000

- Entonces los ingresos desde Enero hasta abril en venta de polietileno de baja densidad es de: $12'366.000



Para el polietileno de Alta densidad:

* En el mes de enero el precio por kg seria $2300 por kg, entonces:

Enero = 1050 x $2300 = 2'415.000

* En el mes febrero el precio por kg seria $1700

Febrero = 3220 x $1700 = 5'474.000

* En el mes Marzo el precio por kg seria $1250

Marzo = 4700 x $1250 = 5'875.000

* En el mes de Abril el precio por kg seria $1970

Abril = 2620 x $1970 = 5'161.400

- Entonces los ingresos desd Enero hasta Abril en venta de polietileno de Alta densidad es de: 18'925.000

Ingresos
- Alta densidad = 18'925.000
- Baja densidad = 12'366.000

Fuente: El autor.

4.2.4.2 Tipo De Respuesta 2 De La Pregunta I. Resolución del E2.

Figura 17: S4, PI, E2.

$F(x,y) = x - y$

Sede Principal

x = Polietileno de alta densidad

y = Polietileno de baja densidad

Polietileno-Kg

Mes 1 $: f(x,y) = \dfrac{2495x \cdot 2597y}{10(x,y)} = 24.950 + 25.970 = \$50.920$

Mes 2 $= f(x,y) = \dfrac{2250x \cdot 2450}{500(x,y)} = 1'125.000 + 1'225.000 = \$2'350.000$

Mes 3 $= f(x,y) = \dfrac{2000x \cdot 2300y}{1000(x,y)} = 2'000.000 + 2'300.000 = \$4'300.000$

Mes 4 $= f(x,y) = \dfrac{1800x \cdot 2180y}{1400(x,y)} = 2'520.000 + 3'052.000 = \$5'572.000$

Mes 5 $= f(x,y) = \dfrac{1450x \cdot 1970y}{2100(x,y)} = 3'045.000 + \quad = \$$

Mes 6 $= f(x,y) = \dfrac{1100x \cdot 2760}{2800(x,y)} = 3'080.000 + \quad = \$$

Mes 7 $= f(x,y) = \dfrac{1000x \cdot 1700}{3000(x,y)} = 3'0000 + \quad = \$$

Mes 8 $= \dfrac{500x \cdot 1400y}{4000(x,y)} = \quad + \quad = \$$

Mes 9 $= \dfrac{250x \cdot 1250y}{4500(x,y)} = \quad + \quad = \$$

Mes 10 $= \dfrac{0x \cdot 1100y}{5000(x,y)} = \quad + \quad = \$$

Situación 4 Sede Principal

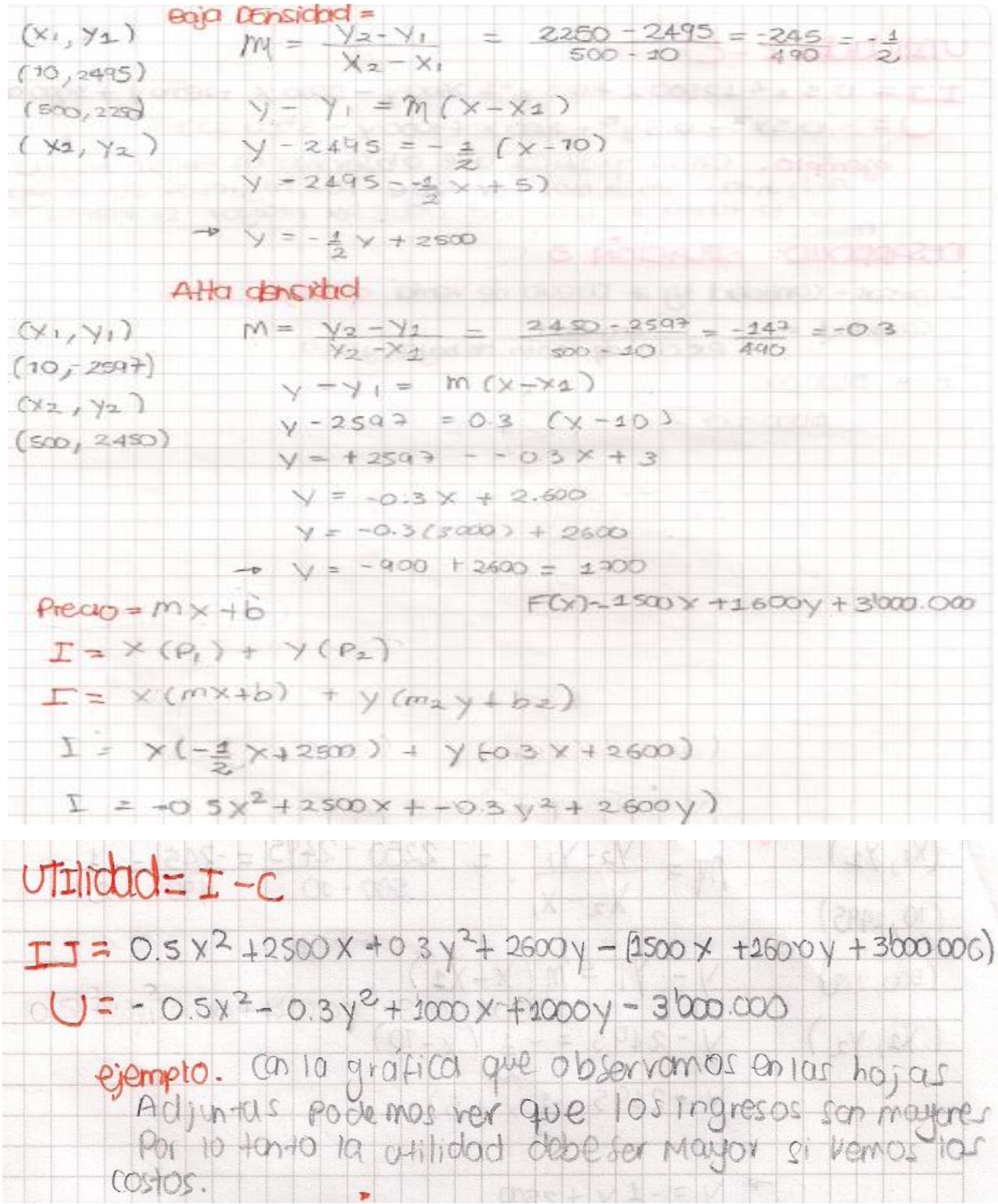
	Precio de Venta de Polietileno	Costos	Utilidad
Enero	55'412.920	13'470.000	41'942.920
Febrero	55'412.920	10'800.000	44'612.920
Marzo	55'412.920	6'700.000	48'712.920
Abril	55'412.920	6'880.000	48'532.920
Mayo	55'412.920	10'800.000	44.612.920
Junio	55'412.920	10'620.000	44'792.920
Julio	55'412.920	13'900.000	41'512.920
Agosto	55'412.920	7'700.000	47'712.920

1. Si se comparan las ventas al mes con los costos de cada uno de los meses; podemos observar que los ingresos son muy superiores a los costos; por lo que se puede decir que hay una excelente utilidad.

Fuente: El autor.

4.2.4.3 Tipo De Respuesta 3 De La Pregunta I. Resolución del E3.

Figura 18; S4, PI, E3.



Baja densidad =

(x_1, y_1)

$(10, 2495)$

$(500, 2250)$

(x_2, y_2)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2250 - 2495}{500 - 10} = \frac{-245}{490} = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2495 = -\frac{1}{2}(x - 10)$$

$$y - 2495 = -\frac{1}{2}x + 5)$$

$$\rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2500$$

Alta densidad

(x_1, y_1)

$(10, 2597)$

(x_2, y_2)

$(500, 2450)$

$$M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2450 - 2597}{500 - 10} = \frac{-147}{490} = -0.3$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2597 = 0.3\ (x - 10)$$

$$y = +2597 - -0.3x + 3$$

$$y = -0.3x + 2.600$$

$$y = -0.3(3000) + 2600$$

$$\rightarrow y = -900 + 2600 = 1700$$

Precio $= mx + b$

$F(x) = 1500x + 1600y + 3'000.000$

$$I = x(P_1) + y(P_2)$$

$$I = x(mx + b) + y(m_2 y + b_2)$$

$$I = x\left(-\frac{1}{2}x + 2500\right) + y(-0.3x + 2600)$$

$$I = -0.5x^2 + 2500x + -0.3y^2 + 2600y)$$

Utilidad $= I - C$

$$U = 0.5x^2 + 2500x + 0.3y^2 + 2600y - (1500x + 1600y + 3000000)$$

$$U = -0.5x^2 - 0.3y^2 + 1000x + 1000y - 3'000.000$$

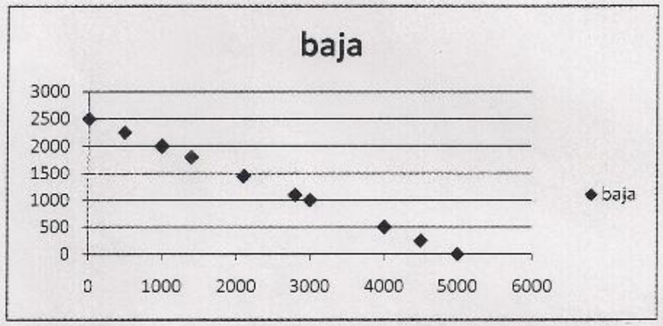
ejemplo. Con la gráfica que observamos en las hojas Adjuntas podemos ver que los ingresos son mayores Por lo tanto la utilidad debe ser Mayor si vemos los costos.

Fuente: El autor.

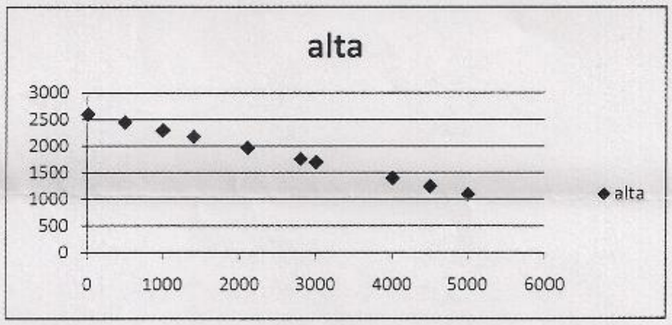
4.2.4.4 Tipo de respuesta 4 de la pregunta I. Resolución del E4.

Figura 19: S4, PI, E4.

kg	baja
10	2495
500	2250
1000	2000
1400	1800
2100	1450
2800	1100
3000	1000
4000	500
4500	250
5000	0



kg	alta
10	2597
500	2450
1000	2300
1400	2180
2100	1970
2800	1760
3000	1700
4000	1400
4500	1250
5000	1100



Baja densidad

(x_1, y_1) $\quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2250 - 2495}{500 - 10} = \frac{-245}{490} = -\frac{1}{2}$

$(10, 2495)$ $\quad y - y_1 = m(x - x_1)$

$(500, 2250)$ $\quad y - 2495 = -\frac{1}{2}(x - 10)$

(x_2, y_2) $\quad y - 2495 \; -\frac{1}{2}x + 5)$

$\rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2500$

Alta densidad

(x_1, y_1) $\quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2450 - 2597}{500 - 10} = \frac{-147}{490} = -0.3$

$(10, 2597)$ $\quad y - y_1 = m(x - x_1)$

(x_2, y_2) $\quad y - 2597 = 0.3(x - 10)$

$(500, 2450)$ $\quad y = +2597 - 0.3 + 3$

$y = -0,3x + 2600$

$y = -0,3(3000) + 2600$

$y = -900 + 2600 = 1700$

$F(x) = 1500x + 1600y + 3'000,000$

Precio = $mx + b$

$I = x(P_1) + y(P_2)$

$I = x(mx + b) + y(P_2)$

$I = x(-\frac{1}{2}x + 2500) + y(-0.3 + 2600)$

$I = 0,5x^2 + 2500x + -0.3y^2 + 2600y)$

Ejemplo: utilidad $I - C$

$u = 0,5x^2 + 2500x + 0.3y^2 + 2600y - (1500x + 1600y + 3'000,000)$

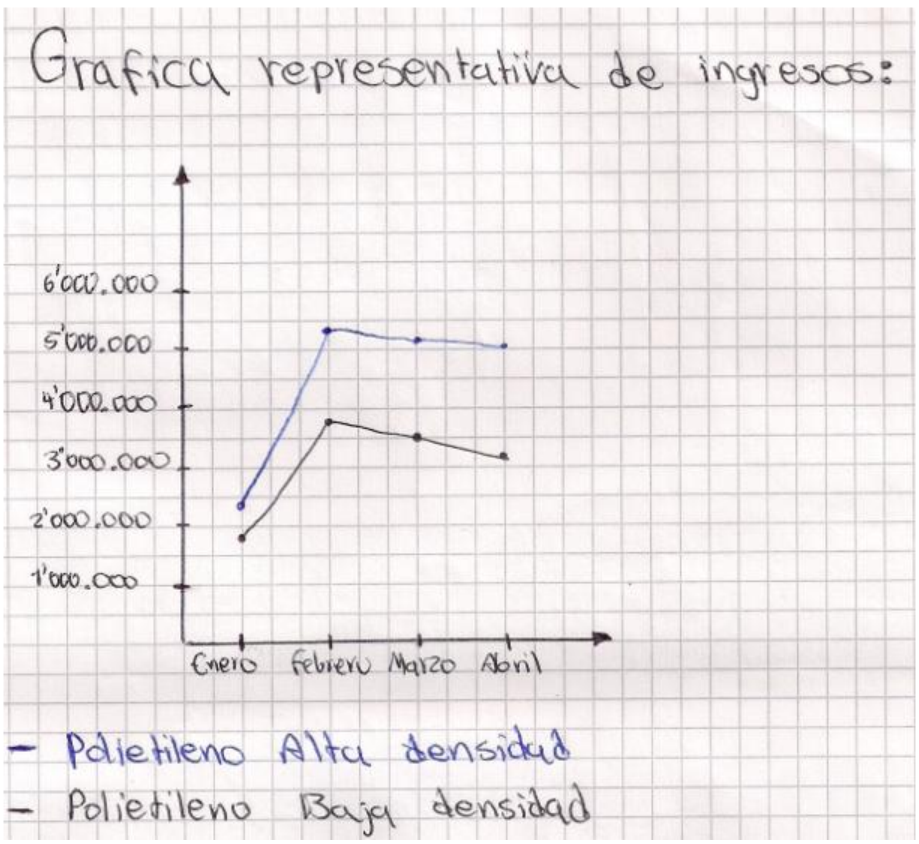
$u = -0\;5x^2 - 0.3y^2 + 1000x + 1000y - 3'000\,000$

Fuente: El autor.

Los estudiantes interpretaron los costos de cada uno de los precios de venta del polietileno y gráficamente determinaron una línea recta, teniendo en algunos casos claro el mecanismo para construir una función lineal y por ende el de funciones en dos variables por tener dos tipos de precio polietileno que generaban el costo de venta de este producto; a partir de ello y por su práctica interpretaron todos los conceptos de costos, ingreso y utilidad. Se presenta en este caso que la utilización de conceptos, procedimientos y representaciones dan solución a la pregunta sugerida y esto a la vez a un campo conceptual.

4.2.4.5 Tipo De Respuesta 1 De La Pregunta II. Resolución del E1.

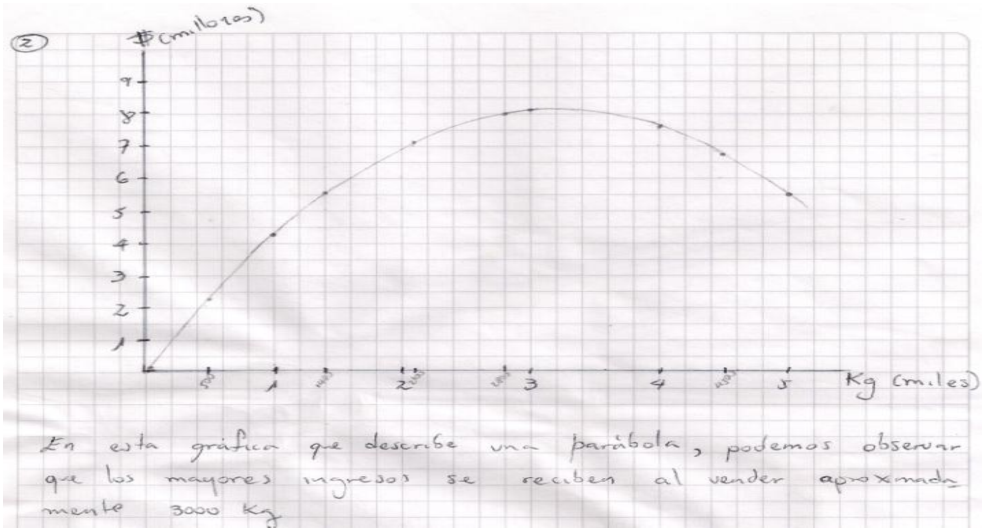
Figura 20: S4, PII, E1.



Fuente: El autor.

4.2.4.6 Tipo De Respuesta 2 De La Pregunta II. Resolución del E2.

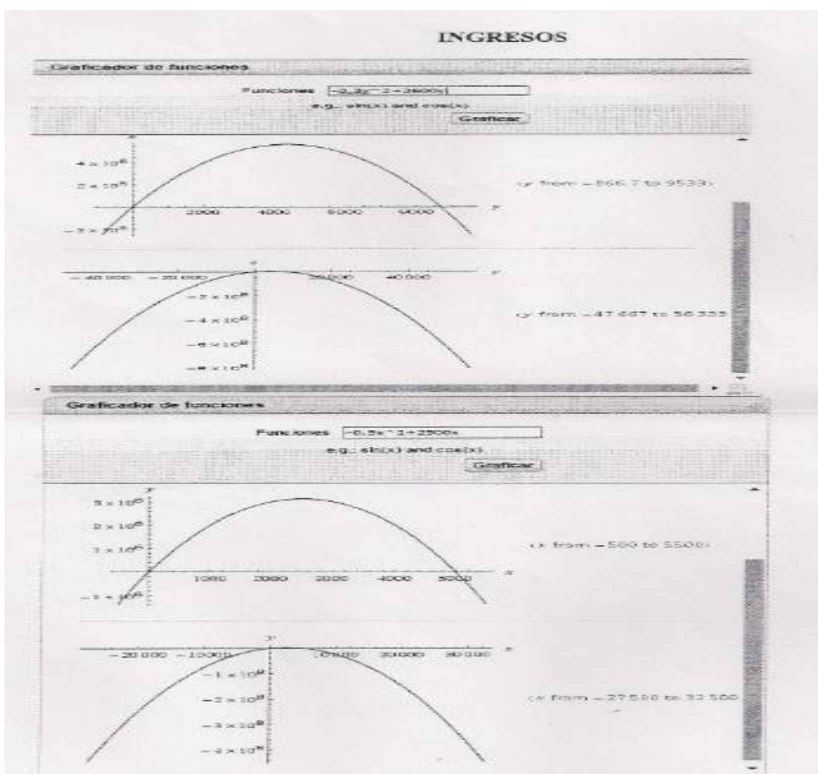
Figura 21: S4, PII, E2.



Fuente: El autor.

4.2.4.7 Tipo De Respuesta 3 De La Pregunta II. Resolución del E4.

Figura 22: S4, PII, E4.

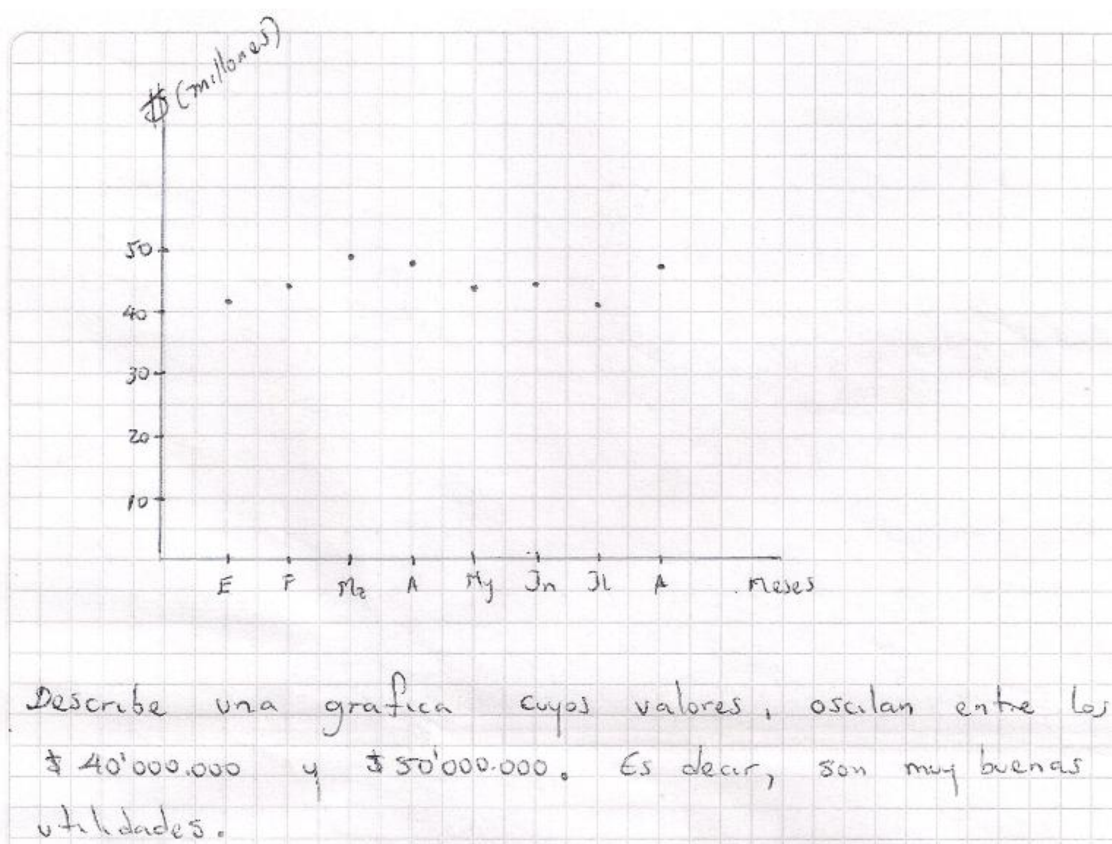


Fuente: El autor.

Los estudiantes al igual que en los puntos anteriores y sus graficas solo pueden generar gráficos de 3 dimensiones solo en un graficador online, puesto que así tengan la función en dos variables no saben ni tienen el conocimiento para obtener la gráfica de dicha función; cabe aclarar que tienen claro el concepto para las funciones en una variable. Aquí los campos conceptuales bajo teoremas de acto están dados para situaciones en las que la solución no es la esperada, sin embargo como construcción de esquemas que generan conceptos de acto si son valiosos.

4.2.4.8 Tipo De Respuesta 1 De La Pregunta III. Resolución del E2.

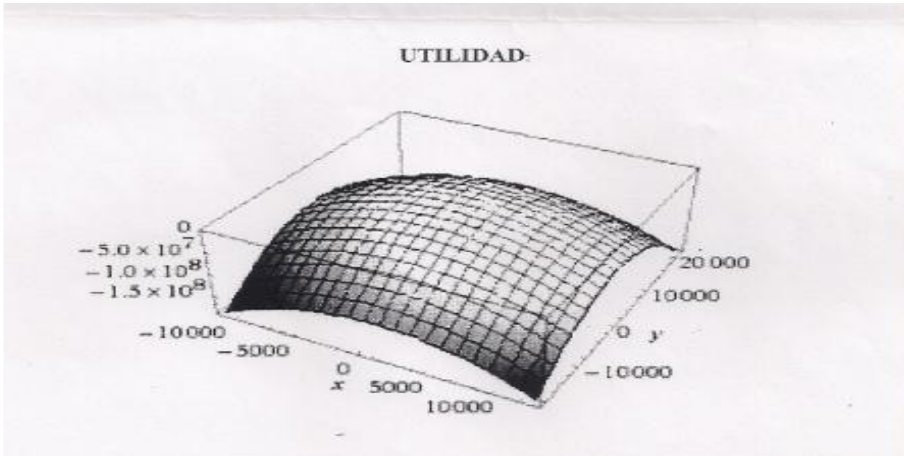
Figura 23: S4, PIII, E2.



Fuente: El autor.

4.2.4.9 Tipo De Respuesta 2 De La Pregunta III. Resolución del E4.

Figura 24: S4, PIII, E4.



Fuente: El autor,

Los estudiantes al igual que en los puntos anteriores y sus graficas solo pueden generar gráficos de 3 dimensiones solo en un graficador online, puesto que así tengan la función en dos variables no saben ni tienen el conocimiento para obtener la gráfica de dicha función, aunque buscan después de obtenida muy buenos análisis de dicha grafica; cabe aclarar que tienen claro el concepto para las funciones en una variable.

4.2.5 Situación 5. Con la información que se tiene de la sede principal de la empresa responder las siguientes cuestiones:

I. ¿Qué cantidad de Kg debe producir y vender para que sus ingresos sean de $5\ millones$ o de $5{,}5\ millones$, o $K\ millones$?
II. ¿Cómo hace la empresa para saber cuánto debe producir y vender para obtener el ingreso deseado?
III. ¿Cuáles son las cantidades de kg que debe producir y vender de cada tipo de polietileno para que sus utilidades sean de $12\ millones$, o $8\ millones$ o $K\ millones$?
IV. ¿Cuál es la utilidad de la empresa para cualquier cantidad de kg de cada tipo de polietileno?

4.2.5.1 Tipo De Respuesta 1 De La Pregunta I. Resolución del E1.

Figura 25: S5, PI, E1.

Ingreso de 5'000.0000

$-\dfrac{5'000.000}{1900+2100} = \dfrac{5'000.000}{40000} = 1250.\text{ kg}$

$-\dfrac{5'500.000}{1850+2150} = \dfrac{5'5\cancel{00}\ 000}{4000} = 1375\text{ kg}$

$-\dfrac{K}{11000}$

Fuente: el autor.

4.2.5.2 Tipo De Respuesta 2 De La Pregunta I. Resolución del E2.

Figura 26: S5, PI, E2.

Si 5 millones, entonces

10 Kg = a → a . b = C
$ 2597 = b ↓
10 x 2597 = $25970

$ 25970 = C → D/C
$ 5'000.000 = D ↓
5'000.000 / 25970 = 192.5

Entonces se deben producir 192.5 kg de polietileno de alta densidad para que sus ingresos sean de 5'000.000

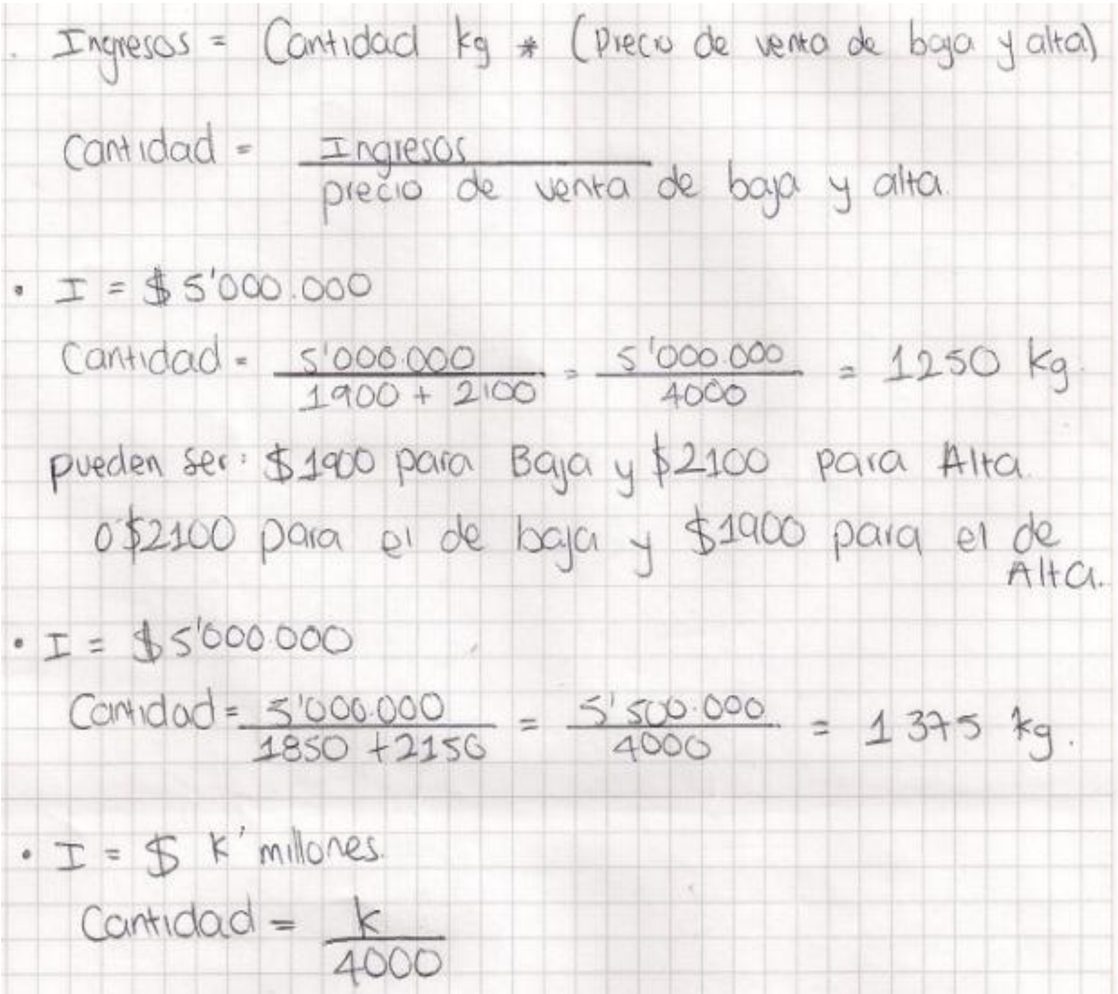
Si 5.5 millones, entonces
10 kg = a →
$ 2597 = b a . b = C → 10 x 2597 = $ 25970
$ 25970 = C
$ 5'500.000 = D → D/C → 5'500.000 / 25970 = 211.78

Entonces se deben producir 211.78 kg de polietileno de alta densidad para que sus ingresos sean de 5'500.000

Fuente: El autor.

4.2.5.3 Tipo De Respuesta 3 De La Pregunta I. Resolución del E3.

Figura 27: S5, PI, E3.

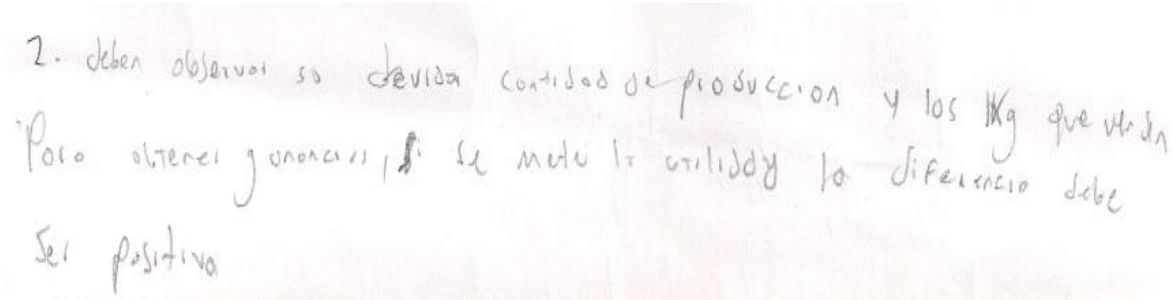


Fuente: El autor

Los estudiantes en este punto trabajan con concepto de funciones de dos variables pero no saben aplicar lo que se requiere, y terminan utilizando la información suministrada en la tabla, que aunque no está mal el análisis, no es lo que se pretende de dar unos resultados a partir de casos particulares. Es decir, los estudiantes buscan dar análisis inmediatos de esquemas que son totalmente sistemáticos.

4.2.5.4 Tipo De Respuesta 1 De La Pregunta II. Resolución del E1.

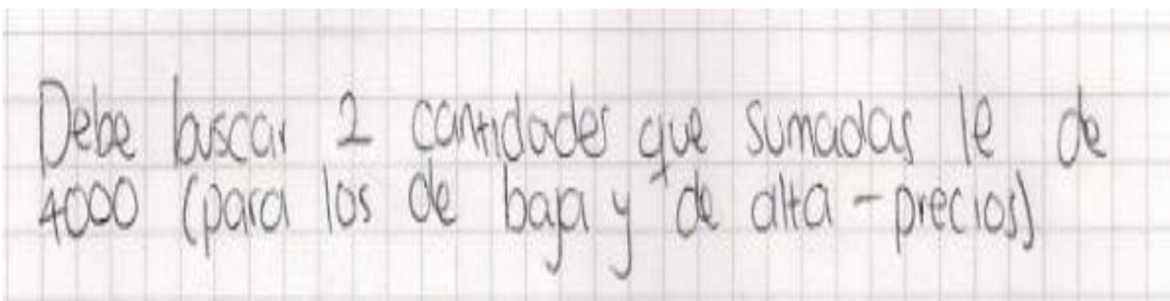
Figura 28: S5, PII, E1.


2. deben observar su debida cantidad de produccion y los Kg que venden para obtener ganancias, si se mete la utilidad la diferencia debe ser positiva

Fuente: El autor

4.2.5.5 Tipo De Respuesta 2 De La Pregunta II. Resolución del E3.

Figura 29: S5, PII, E3.

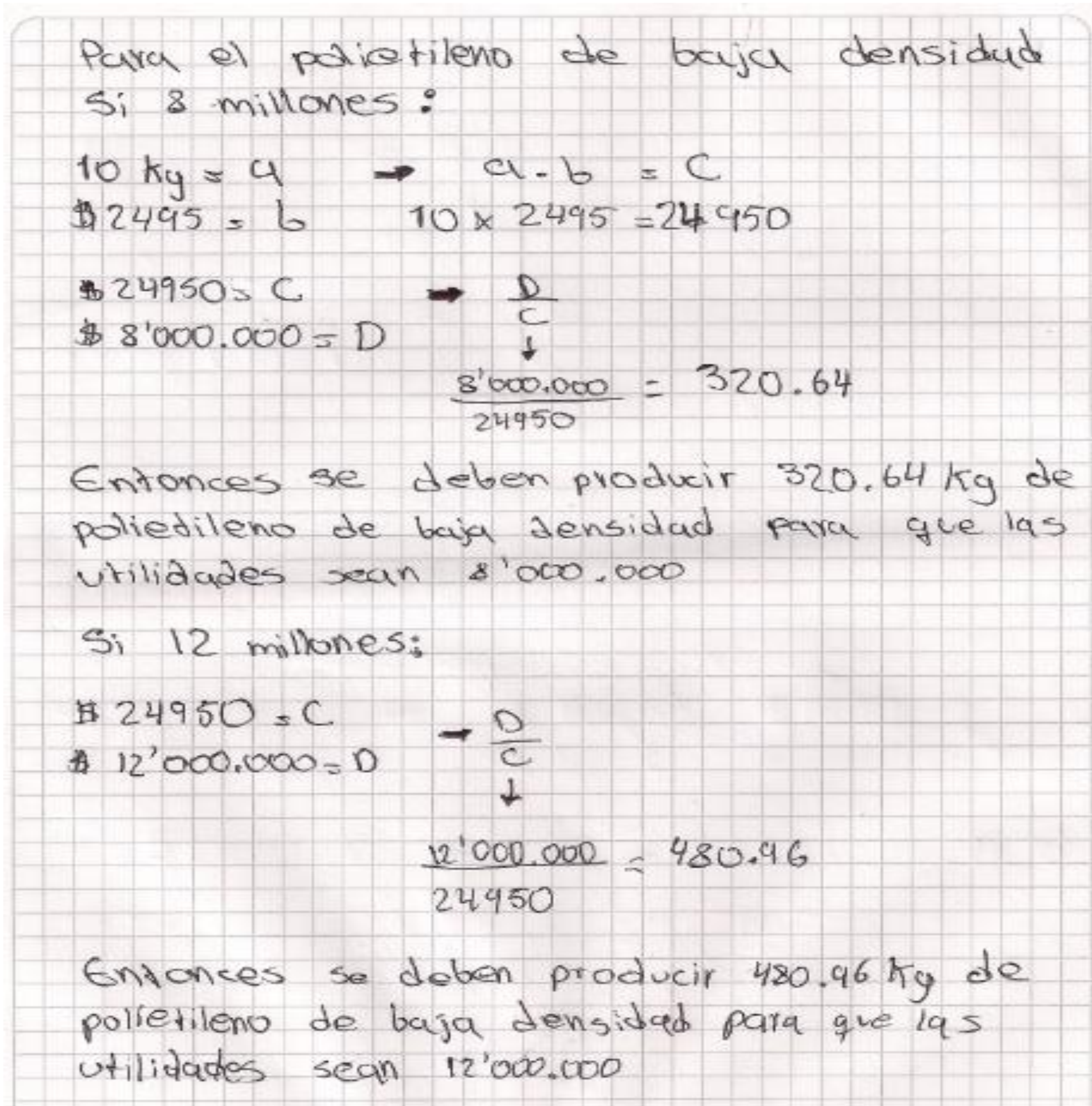

Debe buscar 2 cantidades que sumadas le de 4000 (para los de baja y de alta - precios)

Fuente: El autor

Los estudiantes analizan e interpretan tipo de soluciones estableciendo de alguna manera una optimización entre compra y venta que generen los ingresos deseados para cada caso. Utilizan el concepto de ecuaciones Diofanticas sin tener conocimiento que están haciendo uso de ella. Los conceptos de acto como invariantes operatorios dan origen a diferentes esquemas de carácter implícito que resultan importantes en la conceptualización de teorías por parte de los estudiantes.

4.2.5.6 Tipo De Respuesta 1 De La Pregunta III. Resolución del E2.

Figura 30: S5, PIII, E2.


Para el polietileno de baja densidad

Si 8 millones:

10 kg = a → a · b = C

\$2495 = b   10 x 2495 = 24950

\$24950 = C → $\frac{D}{C}$

\$ 8'000.000 = D

$\frac{8'000.000}{24950} = 320.64$

Entonces se deben producir 320.64 kg de poliedileno de baja densidad para que las utilidades sean 8'000.000

Si 12 millones:

\$ 24950 = C → $\frac{D}{C}$

\$ 12'000.000 = D

$\frac{12'000.000}{24950} \approx 480.96$

Entonces se deben producir 480.96 kg de polietileno de baja densidad para que las utilidades sean 12'000.000

Fuente: El autor.

El alumno hace una interpretación incorrecta de la pregunta, ya que se le pide no una sola cantidad de polietileno para que las utilidades sean las esperadas, sino todas las que cumplan con la condición sugerida, además se podrían establecer para efectos de facilidad cantidades enteras y el solo analiza una ecuación para dos valores fijos, pero es un paso importante para determinar las demás soluciones a partir de teoría que permita determinar estos valores; estas tareas solicitadas al estudiante son procesos que el estudiante posiblemente no ha confrontado y por ende la interpretación del proceso y respuesta no es el adecuado, aunque la forma como lo aborda permite la generación de esquemas sistemáticos en los que el razonamiento permite que se llegue a una conclusión inmediata que aunque no es del todo errónea si no resuelve lo planteado en la pregunta.

5. CONCLUSIONES.

En el capítulo anterior se hizo un análisis de cada una de las respuestas de los estudiantes a cada situación planteada, en la que se observó tanto la interpretación como la resolución de cada problema siendo correcta o incorrecta su estrategia a desarrollar. Las conclusiones más relevantes se describen a continuación.

Los argumentos teóricos matemáticos que utilizan son consecuentes con los conceptos teóricos básicos obtenidos durante sus cursos previos de matemáticas; aunque, algunos de ellos pueden inducir características diferentes en el proceso de las situaciones por medio de esquemas y sus procesos y no se arriesgan a plantear propuestas como un nuevo concepto que permita que la solución obtenida sea satisfactoria con su finalidad. También encontramos estudiantes que no inducen nuevos procesos de solución ya que sus conocimientos básicos no permiten establecer como mínimo una aplicación requerida para tal fin.

En el análisis se evidencia la dificultad de algunos estudiantes en la estrategia que deben utilizar para pasar a la forma simbólica algunos planteamientos textuales que indican un procedimiento matemático, esto es, no hicieron una lectura profunda para la comprensión de cada situación. Los errores sobre funciones utilizando más de una variable son notables si se tiene en cuenta que solo han recibido previamente un curso de cálculo univariado. Sin embargo, bajo este mismo análisis es interesante el cuestionamiento que se hacen sobre algunos aspectos que quedan por fuera de su análisis al trabajar en una sola variable.

Los estudiantes en los análisis de las situaciones solo se remiten a la teoría aprendida en matemáticas I y en algunos casos se les dificultad ampliar este campo, precisamente al ver que con la función escrita no abarcan toda la información que plantea cada situación, es por esto que así no tengan conocimiento sobre función en más de una variable, extienden estas funciones en una sola variable a un nuevo parámetro que inicia una construcción de una nueva teoría a la que no han tenido aun acceso. Hacer una construcción de un esquema que dé solución a las diferentes situaciones implica el enfrentamiento que le de cada estudiante a cada una de ellas.

En el análisis hecho por los estudiantes a cada situación planteada se evidencio que para determinar funciones en una sola variable se apoyan específicamente en comportamientos gráficos y no en un procedimiento formal matemático, generando que en algunos casos los planteamiento fuesen erróneos ya que no tomaban el comportamiento general sino el comportamiento para dos eventos específicos. En algunos otros casos los estudiantes a partir de sus conocimientos previos de cálculo, demostraron tener más habilidad a la hora de formular y plantear funciones que generaban un proceso más detallado en funciones de una variable; sin embargo en ambos casos, los conocimientos que tenían de funciones de una variable les permitieron deducir que hacía falta algo más para plantear de forma óptima las situaciones que se estaban observando.

Los resultados muestran de forma muy clara que los estudiantes aunque construyeron teoría de la que no tenían conocimiento previo, utilizaron estrategias para escribir funciones que les pareciera que planteaban su problema; aunque no utilizaron todas las herramientas matemáticas que brinda el cálculo para este tipo de planteamientos; herramientas que podrían parecer muy fáciles en algunos casos.

El estudio muestra lo difícil que es para estudiantes de primer año en universidad plantear conceptos de funciones en dos o más variables a partir de conocimientos previos de cálculo, aunque a partir de algunas estrategias pedagógicas y didácticas estas dificultades pueden ser superadas con ayuda de las teorías propuestas por Vergnaud (1990). La enseñanza de la teoría de función en dos o más variables se ofrece de forma muy breve en los cursos de educación superior en un nivel medio o alto de formación; es por esto que esta temática sería de gran utilidad de una forma más específica y menos superficial para que el estudiante pueda plantear estrategias o esquemas que sugieran una buena base para enfrentar con razonamientos ciertos o falsos cualquier tipo de solución a una situación dada.

Este trabajo de investigación más que mostrar quiere cuestionar de forma constructiva la manera como se está en enseñando en educación superior esta clase de temáticas y sobre todo las estrategias o esquemas que se presentan a los estudiantes para que aborden situaciones en las que el estudiante las enfrente y determine procesos que den sentido, significado y represente la construcción de un nuevo concepto para la solución de estas.

El estudiante cuando cuenta con los conceptos claros y precisos y es competente en la temática vista de cursos básicos de matemáticas, genera esquemas sistemáticos o inmediatos y esto fue lo que mostraron muy pocos estudiantes, sin embargo también otros estudiantes mostraron que estos conceptos ya no so son tan claros y sus competencias matemáticas no son tan fuertes y usaron varias estrategias o esquemas que comienzan a combatir y competir para llegar a la resolución de la situación. En estudios posteriores el análisis de la conveniencia y pertinencia de este estudio seria de mucha relevancia.

La enseñanza de las funciones de dos variables o más debe ser replanteada inclusive en el nivel que se ejecuta, ya que los estudiantes no solo en los primeros años de universidad sino en los últimos de su educación media están en condiciones de plantear situaciones que tengan que ver con este campo, solo hay que darles la posibilidad de encontrar esquemas adecuados que permitan interpretar, razonar y dar solución a muchos problemas de la vida diaria.

Algunas recomendaciones generadas a partir de esta investigación son las siguientes:
Que los docentes de la Universidad de Ibagué utilicen durante cada semestre situaciones problema en cada línea profesional que permita apoyar y afianzar los contenidos vistos en clase de matemáticas 2 para que los estudiantes activos en esas carreras fortalezcan y construyan en muchos casos su aprendizaje.

No solo en esta universidad sino en cualquier universidad, los programas que ofrezcan las asignaturas de matemáticas aborde el tema de cálculo en función de dos variables durante un periodo del curso más amplio en el semestre que corresponda, ya que los estudiantes en su ámbito profesional presentan la necesidad de adquirir estos conceptos para la resolución de situaciones que se presenten en su campo laboral.

REFERENCIAS

Apostol, T. M. (1999*). "CALCULUS" VOL. 1, Cálculo con Funciones en una Variable con una Introducción al Álgebra Lineal.* (2 ED.). Barcelona: REVERTÉ, S.A.

Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. & Gómez, P. (Ed.). (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M. *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 97 - 135). Bogotá: iberoamericana.

Costa, V. A.; Arlego, M. & Otero, M. R. (2014). Enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad: Propuesta de Recorridos de Estudio e Investigación*. Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria, 7*(1), 20 - 40.

Haeussler, F. E. (2003). *Matemáticas para Administración y Economía.* (10 ED.). Ciudad de México: PEARSON EDUCACIÓN.

Landa, H. (2010). Acercamiento a funciones con dos variables*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4), 129-145.

Larson, R. (2000). *CÁLCULO 2 DE VARIAS VARIABLES.* (9 ED.). México: Mc Graw - Interamericana Editores S. A.

Leithold, L. (2000*). El Cálculo.* (7ª ED.). Ciudad de México: Universidad Iberoamericana.

Martínez, A. L.; Díaz, J. J. & Soto, M. A. (2007). Comprensión de la función de dos variables en problemas verbales de álgebra. *Enseñanza e Investigación en Psicología, 12*(2), 259-275.

Otero, M. R.; Fanaro, M. D.; Sureda, P.; Llanos, V. C. & Arlego, M. (2014). *La Teoría de los Campos Conceptuales y la Conceptualización en el Aula de Matemática y Fisica.* Buenos Aires: Dunken.

Pérez, Y. & Raquel, R. (2011). Estrategias de Enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos*. Revista de Investigación, 35*(73), 169-194.

Sureda, P. & Otero, M. R. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial*. Educación Matemática, 25*(2), 89 - 118.

Swokowski, E. W. (1989). *Cálculo con Geometría Analítica*. (2 ED.). Belmont, California: Grupo Editorial Iberoamérica.

Trigueros, M. & Martinez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics, 73*(1), 3 - 19.

Vergnaud, G. (1990). Teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 10*, (2, 3), 133 - 170.

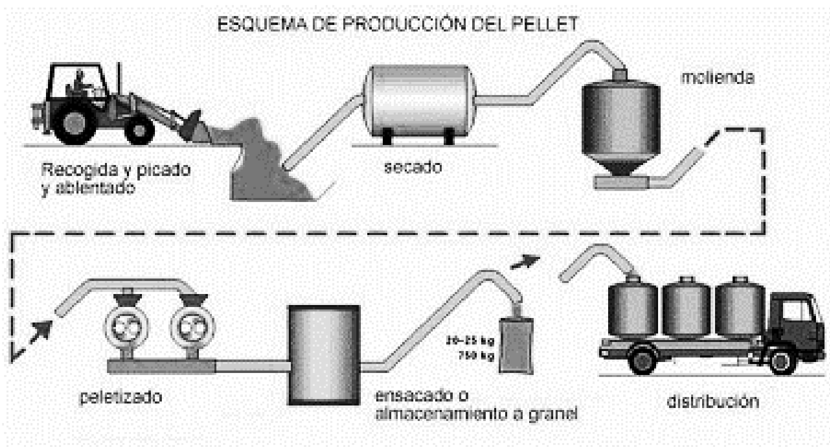
Zuñiga, L. (Marzo de 2007). El Cálculo en carreras de Ingeniería: Un Estudio Cognitivo. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10*(1), 145-175.

ANEXOS

Anexo A. Cuestionario.

SITUACIÓN 1.

Una empresa de reciclaje de polietileno de baja y alta densidad, compra los empaques plásticos de segunda a un mismo precio sin importar que tipo de plástico sea y por medio de un proceso industrial los convierte en pellet, el cual es vendido en Kg para la fabricación de nuevos empaques plásticos.



El proceso industrial demanda el alquiler de una bodega en el sector industrial de la ciudad y la contratación de tres operarios.

El contador de la empresa realiza un resumen de todos los costos cada fin de mes como se muestra en la siguiente tabla:

Sede: Principal	Kg procesados de Baja densidad	Kg procesados de alta densidad	Costos de Compra de plástico usado	Costos industriales del proceso para Baja densidad	Costos industriales del proceso para Alta densidad	Alquiler de Bodega	Pago Nomina
Enero	2500	4200	4020000	2250000	4200000	1000000	2000000
Febrero	2000	3000	3000000	1800000	3000000	1000000	2000000
Marzo	1400	1000	1440000	1260000	1000000	1000000	2000000
Abril	1200	1300	1500000	1080000	1300000	1000000	2000000
Mayo	2000	3000	3000000	1800000	3000000	1000000	2000000
Junio	2200	2700	2940000	1980000	2700000	1000000	2000000
Julio	3000	4000	4200000	2700000	4000000	1000000	2000000
Agosto	1000	2000	1800000	900000	2000000	1000000	2000000

1. ¿Cuáles son los costos de la empresa?

2. ¿Cómo puede mostrar gráficamente el comportamiento de los costos y explicarlos a la junta directiva de la empresa?

ANTICIPACIÓN SITUACIÓN 1

1. Tomando la información de la tabla podemos obtener nueva información y agregar algunas columnas con datos que se consideran importantes

<	Kg procesados de Baja densidad	Kg procesados de alta densidad	Kg comprados y procesados	Costos de Compra de plástico usado	Precio compra por Kg de plástico usado	Costos industriales del proceso para Baja densidad	Costo del proceso industrial por Kg de	Costos industriales del proceso para Alta densidad	Costo del proceso industrial por Kg de	Alquiler de Bodega	Pago Nomina
Enero	2500	4200	6700	4020000	600	2250000	900	4200000	1000	1000000	2000000
Febrero	2000	3000	5000	3000000	600	1800000	900	3000000	1000	1000000	2000000
Marzo	1400	1000	2400	1440000	600	1260000	900	1000000	1000	1000000	2000000

Abril	1200	1300	2500	1500000	600	1080000	900	1300000	1000	1000000	2000000
Mayo	2000	3000	5000	3000000	600	1800000	900	3000000	1000	1000000	2000000
Junio	2200	2700	4900	2940000	600	1980000	900	2700000	1000	1000000	2000000
Julio	3000	4000	7000	4200000	600	2700000	900	4000000	1000	1000000	2000000
Agosto	1000	2000	3000	1800000	600	900000	900	2000000	1000	1000000	2000000

Ahora con base a los cálculos numéricos podemos encontrar algunas relaciones como:

a. El costo de compra del plástico usado y procesamiento de cada Kg de polietileno de baja densidad es de $\$1500$.

b. El costo de compra del plástico usado y procesamiento de cada Kg de polietileno de alta densidad es de $\$1600$.

c. El valor de alquiler de la bodega y el pago de nómina es constantes cada mes.

Si se realiza un análisis de los resultados anteriores y de la tabla podemos ir llegando a unas afirmaciones, como:

Si llamamos

x: Cantidad de polietileno de baja densidad comprado y procesado.

y: Cantidad de polietileno de alta densidad comprado y procesado.

Costo de polietileno de baja densidad está dado por $CB = (600 + 900)x$

Costo de polietileno de alta densidad está dado por $CA = (600 + 1000)y$

Costos fijos, alquiler y nomina está dado por $CF = 1000000 + 2000000$

Ahora podemos encontrar los costos totales

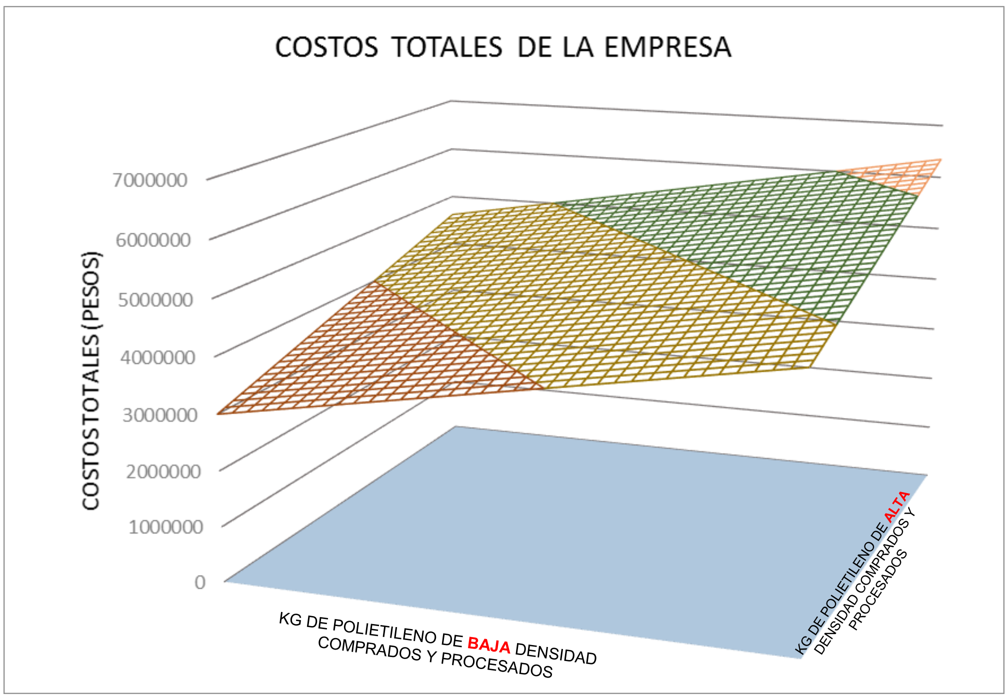
$$CT = CB + CA + CF$$

$$C(x, y) = 1500x + 1600y + 3000000$$

Para poder visualizar el comportamiento de los costos podemos construir una tabla donde le damos distintos valores para cada tipo de polietileno y encontramos un valor para el costo.

$X\ (kg)$	$Y\ (kg)$	$C(x,y)$
10	20	3047000
100	200	3470000
150	220	3577000
180	250	3670000
200	320	3812000
290	400	4075000
900	720	5502000
1000	9000	32400000

Ahora con la ayuda de cualquier graficadora de 3D podemos observar el comportamiento de la función del costo, como se visualiza a continuación:



Esta gráfica debe ser interpretada a la junta directiva, en el que se puede especificar por ejemplo que en el caso de que la producción sea nula, la empresa va a generar unos costos de $\$3\ millones$.

A partir de la gráfica y de procedimientos matemáticos podemos deducir algunos aspectos importantes como por ejemplo:

Si se compran y procesan $120\ kg$ de polietileno de baja densidad, entonces cuantos kg de alta densidad debemos comprar y procesar si queremos que los costos sean de $\$5\ millones$?

Luego el planteamiento y procedimiento de la situación anterior estarían dados por:

$$x = 120\ \ y\ \ C(x,y) = 5000000\ \ \rightarrow\ \ y = ?$$

$$1500(120) + 1600y + 3000000 = 5000000$$

$$180000 + 1600y = 5000000 - 3000000$$

$$1600y = 2000000 - 180000$$

$$y = \frac{18200}{16}$$

$$y \approx 1137{,}5$$

Algunas otras cantidades de polietileno de alta y baja densidad que generan un costo fijo de $\$5000000$ estan resumidos en la siguiente tabla:

$\boldsymbol{X}\ (\boldsymbol{kg})$	$\boldsymbol{Y}\ (\boldsymbol{kg})$	$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$
120	1137,5	5000000
200	1062,5	5000000
320	950	5000000
448	830	5000000
560	725	5000000
640	650	5000000
1040	275	5000000
1200	125	5000000

SITUACIÓN 2

La empresa necesita vender una de sus tres sedes en el país y la junta directiva desea tomar su decisión basados únicamente en los costos, para ello el gerente realiza un resumen de los costos durante varios meses, los cuales se encuentran en las siguientes tablas:

Sede 2	Kg procesados de Baja densidad	Kg procesados de alta densidad	Costos de Compra de plástico usado	Costos industriales del proceso para Baja densidad	Costos industriales del proceso para Alta densidad	Alquiler de Bodega	Pago Nomina
Mes 1	2500	4200	3685000	2000000	4830000	800000	2000000
Mes 2	2000	3000	2750000	1600000	3450000	800000	2000000
Mes 3	1400	1000	1320000	1120000	1150000	800000	2000000
Mes 4	1200	1300	1375000	960000	1495000	800000	2000000
Mes 5	2000	3000	2750000	1600000	3450000	800000	2000000

Sede 3	Kg procesados de Baja densidad	Kg procesados de alta densidad	Costos de Compra de plástico	Costos industriales del proceso para Baja densidad	Costos industriales del proceso para Alta densidad	Alquiler de Bodega	Pago Nomina
Mes 1	2500	4200	4690000	2375000	4620000	0	2500000
Mes 2	2000	3000	3500000	1900000	3300000	0	2500000
Mes 3	1400	1000	1680000	1330000	1100000	0	2500000
Mes 4	1200	1300	1750000	1140000	1430000	0	2500000
Mes 5	2000	3000	3500000	1900000	3300000	0	2500000

La junta directiva le recomienda al gerente seguir las siguientes sugerencias:

1. Encontrar los costos para cada una de las sedes.
2. Realizar una gráfica donde se puedan observar todos los costos de cada una de las sedes e interpretarla.
3. Plantear un modelo que se pueda ajustar dependiendo de las características de los costos para cada una de las sedes o de cualquier empresa con iguales características.

¿Cómo sería el informe del gerente y cuál sería su recomendación a la junta directiva?

ANTICIPACIÓN SITUACIÓN 2

El procedimiento es análogo para cada una de las sedes, esto permite encontrar una representación funcional de los costos en cada una de las sedes:

Para la sede 2 repitiendo el proceso anterior tendríamos que:

Sede: Principal	**Kg procesados de Baja densidad**	**Kg procesados de alta densidad**	**Kg comprados y procesados**	**Costos de Compra de plástico usado**	**Precio compra por**	**Costos industriales del proceso para Baja densidad**	**Costo del proceso**	**Costos industriales del proceso para Alta densidad**	**Costo del proceso industrial por Kg de**	**Alquiler de Bodega**	**Pago Nomina**
Mes 1	2500	4200	6700	3685000	550	2000000	800	4830000	1150	800000	2000000
Mes 2	2000	3000	5000	2750000	550	1600000	800	3450000	1150	800000	2000000
Mes 3	1400	1000	2400	1320000	550	1120000	800	1150000	1150	800000	2000000
Mes 4	1200	1300	2500	1375000	550	960000	800	1495000	1150	800000	2000000
Mes 5	2000	3000	5000	2750000	550	1600000	800	3450000	1150	800000	2000000

Ahora con base a los cálculos numéricos podemos encontrar algunas relaciones como:

d. El costo de compra del plástico usado y procesamiento de cada Kg de polietileno de baja densidad es de $\$1350$.

e. El costo de compra del plástico usado y procesamiento de cada Kg de polietileno de alta densidad es de $\$1700$.

f. El valor de alquiler de la bodega y el pago de nómina es constantes cada mes.

Si se realiza un análisis de los resultados anteriores y de la tabla podemos ir llegando a unas afirmaciones, como:

Si llamamos

x: Cantidad de polietileno de baja densidad comprado y procesado.

y: Cantidad de polietileno de alta densidad comprado y procesado.

Costo de polietileno de baja densidad está dado por $CB = (550 + 800)x$

Costo de polietileno de alta densidad está dado por $CA = (550 + 1150)y$

Costos fijos, alquiler y nomina está dado por $CF = 800000 + 2000000$

Ahora podemos encontrar los costos totales

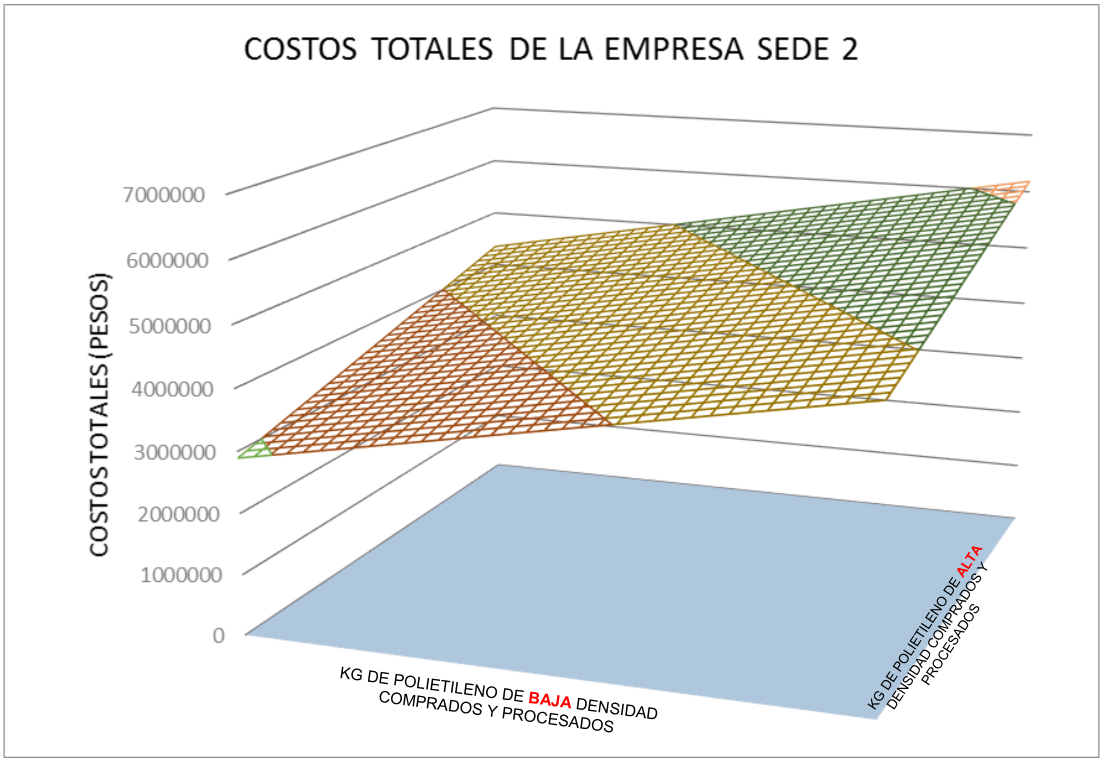
$$CT = CB + CA + CF$$

$$C(x, y) = 1350x + 1700y + 2800000$$

Para poder visualizar el comportamiento de los costos podemos construir una tabla donde le damos distintos valores para cada tipo de polietileno y encontramos un valor para el costo.

$\boldsymbol{X}\ (\boldsymbol{kg})$	$\boldsymbol{Y}\ (\boldsymbol{kg})$	$\boldsymbol{C(x, y)}$
10	20	2847500
100	200	3275000
150	220	3376500
180	250	3468000
200	320	3614000
290	400	3871500
900	720	5239000
1000	9000	19450000

Ahora con la ayuda de cualquier graficadora de 3D podemos observar el comportamiento de la función del costo, como se visualiza a continuación:



Esta gráfica debe ser interpretada a la junta directiva, en el que se puede especificar por ejemplo que en el caso de que la producción sea nula, la empresa va a generar unos costos de $\$2'800.000\ millones$.

Para la sede 3 tendríamos que:

Sede: Principal	**Kg procesados de Baja densidad**	**Kg procesados de alta densidad**	**Kg comprados y procesados**	**Costos de Compra de plástico usado**	**Precio compra por**	**Costos industriales del proceso para Baja densidad**	**Costo del proceso**	**Costos industriales del proceso para Alta densidad**	**Costo del proceso industrial por Kg de**	**Alquiler de Bodega**	**Pago Nomina**
Mes 1	2500	4200	6700	4690000	700	2375000	950	4620000	1100	0	2500000
Mes 2	2000	3000	5000	3500000	700	1900000	950	3300000	1100	0	2500000
Mes 3	1400	1000	2400	1680000	700	1330000	950	1100000	1100	0	2500000
Mes 4	1200	1300	2500	1750000	700	1140000	950	1430000	1100	0	2500000
Mes 5	2000	3000	5000	3500000	700	1900000	950	3300000	1100	0	2500000

Ahora con base a los cálculos numéricos podemos encontrar algunas relaciones como:

a. El costo de compra del plástico usado y procesamiento de cada Kg de polietileno de baja densidad es de $\$1650$.

b. El costo de compra del plástico usado y procesamiento de cada Kg de polietileno de alta densidad es de $\$1800$.

c. El valor de alquiler de la bodega y el pago de nómina es constantes cada mes.

Si se realiza un análisis de los resultados anteriores y de la tabla podemos ir llegando a unas afirmaciones, como:

Si llamamos

x: Cantidad de polietileno de baja densidad comprado y procesado.

y: Cantidad de polietileno de alta densidad comprado y procesado.

Costo de polietileno de baja densidad está dado por $CB = (700 + 950)x$

Costo de polietileno de alta densidad está dado por $CA = (700 + 1100)y$

Costos fijos, alquiler y nomina está dado por $CF = 0 + 2500000$

Ahora podemos encontrar los costos totales

$$CT = CB + CA + CF$$

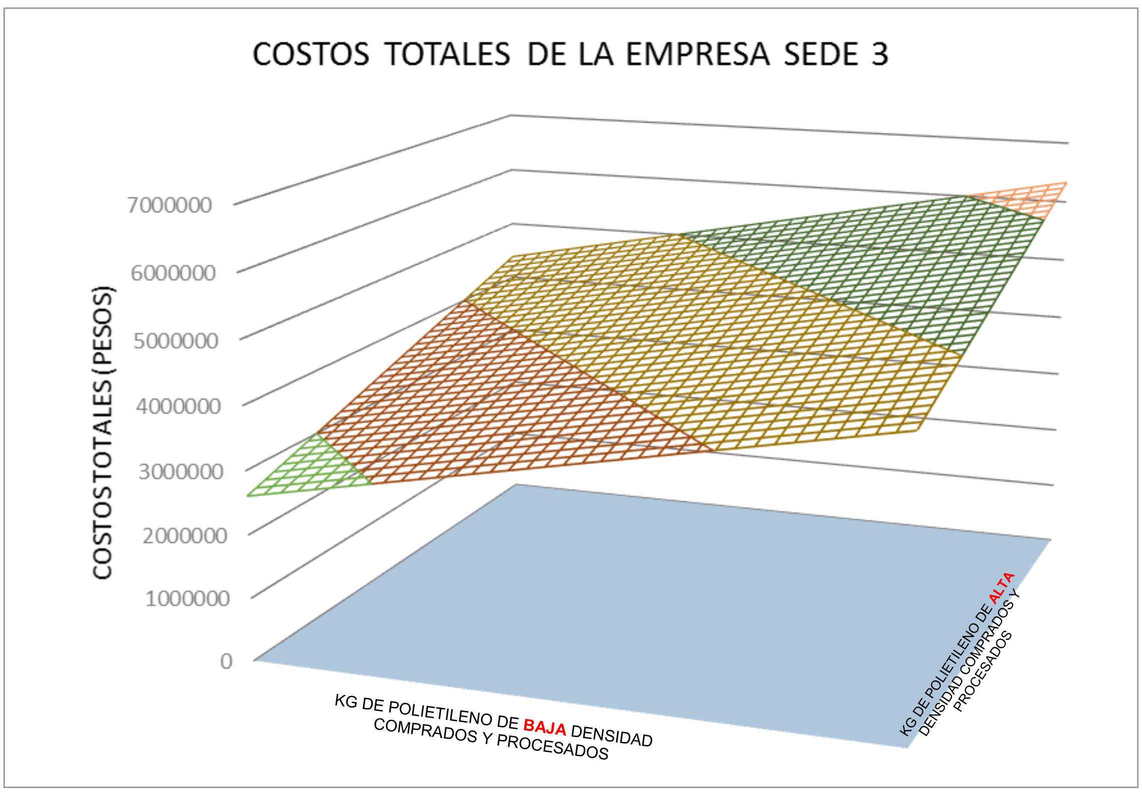
$$C(x, y) = 1650x + 1800y + 2500000$$

Para poder visualizar el comportamiento de los costos podemos construir una tabla donde le damos distintos valores para cada tipo de polietileno y encontramos un valor para el costo.

$\boldsymbol{X}\ (\boldsymbol{kg})$	$\boldsymbol{Y}\ (\boldsymbol{kg})$	$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
10	20	2552500
100	200	3025000

$X\ (kg)$	$Y\ (kg)$	$C(x,y)$
150	220	3143500
180	250	3247000
200	320	3406000
290	400	3698500
900	720	5281000
1000	9000	20350000

Ahora con la ayuda de cualquier graficadora de 3D podemos observar el comportamiento de la función del costo, como se visualiza a continuación:



Esta gráfica debe ser interpretada a la junta directiva, en el que se puede especificar por ejemplo que en el caso de que la producción sea nula, la empresa va a generar unos costos de $\$2'500.000\ millones$.

En resumen tendríamos la ecuación de costos generales para cada una de las sedes:

Sede 1

$$C(x,y) = 1500x + 1600y + 3000000$$

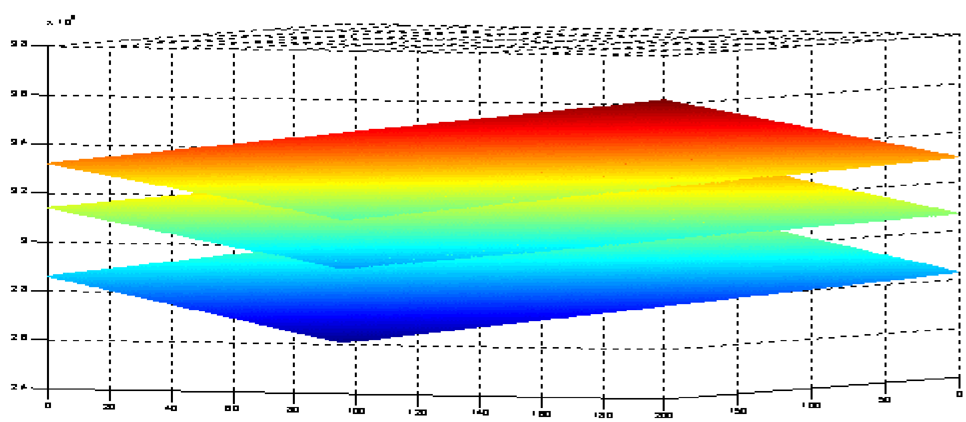
Sede 2

$$C(x,y) = 1350\text{x} + 1700\text{y} + 2800000$$

Sede 3

$$C(x,y) = 1650\text{x} + 1800\text{y} + 2500000$$

Mediante un graficar 3D podemos ver de forma simultánea los cosos generales de las 3 sedes:



A partir de la representación en el espacio de todos los planos que representan cada uno de los costos, podemos inferir que la recomendación es vender la sede que tiene mayores costos.

Podemos entrar a construir un modelo general para los costos de esta empresa, que se pueda adaptarse las condiciones de cada una de las sedes según las condiciones particulares a que den lugar

$$C(x,y) = CB_0 x + CA_0 y + CF_0$$

CB_0: Costo por Kg de polietileno de Baja densidad.

CA_0: Costo por Kg de polietileno de Alta densidad.

CF_0: Costo Fijo.

SITUACIÓN 3

La empresa desea estabilizar los costos en cada una de sus sedes, pero necesita tener la información suficiente sobre la cantidad de kg que puede comprar y producir con diferentes posibles cantidades de dinero.

1. ¿Qué cantidad de kg puede comprar y producir si los costos deben ser de $5\ millones$, o $7\ millones$, o $10\ millones$ o $k\ millones$?

1.1 Representar todos los casos en una gráfica y para cada una de las sedes de la empresa.

2. ¿Si necesitamos producir 1200 kg o 1800 kg de polietileno de baja densidad, qué opciones tengo para los costos y cantidad de kg de polietileno de alta densidad?

2.1 Representar por medio de una gráfica y para cada sede de la empresa.

3. ¿Si necesitamos producir 1000 kg o 2000 kg de alta densidad, que opciones se tiene para los costos y cantidad de polietileno de baja densidad?

3.1 Representar por medio de un gráfico y para cada sede de la empresa.

ANTICIPACIÓN SITUACIÓN 3

Sede 1.

Con la ecuación del costo

$$C(x,y) = 1500x + 1600y + 3000000$$

Como tomaron como un valor constante de

a. 5000000

$$5000000 = 1500x + 1600y + 3000000$$

$$2000000 = 1500x + 1600y$$

$$2000000 - 1500x = 1600y$$

$$y = \frac{2000000 - 1500x}{1600}$$

$$y = 1250 - 0.9375x$$

Como nos estamos refiriendo a cantidades preferiblemente enteras, a partir de ecuaciones Diofanticas podríamos establecer una tabla de valores para que los costos sean exactamente de $5´000.000$.

La ecuación

$$2000000 - 1500x = 1600y$$

Podríamos expresarla como

$$1600y + 1500x = 2000000$$

Simplificando

$$15x + 16y = 20000$$

El máximo común divisor entre $15\ \ y\ \ 16$ se obtiene asi:

$(15{,}16) = 1$ Por algoritmo de división $\quad 16 = 15(1) + 1$

$$\rightarrow \quad 15(-1) + 16(1) = 1$$

$$\rightarrow \quad 15(-20000) + 16(20000) = 20000$$

$$\rightarrow \quad 15(16m - 20000) + 16(20000 - 15m) = 20000; \quad m \in \mathbb{Z}^+$$

Tal que

$$x = 16m - 20000 \quad \text{Y} \quad y = 20000 - 15m$$

Como $x, y \in \mathbb{Z}^+$ entonces

$$16m - 20000 \geq 0$$

$$16m \geq 20000$$

$$m \geq 1250$$

$$20000 - 15m \geq 0$$

$$20000 \geq 15m$$

$$m \leq \frac{20000}{15} = 1333{,}3 \approx 1333$$

Por tanto

$$1250 \leq m \leq 1333$$

La tabla se puede construir a partir de los valores de este intervalo (en total son 83 soluciones enteras para la ecuacion); por ejemplo si $m = 1300\ \ entonces$

$$x = 16(1300) - 20000$$

$$x = 20800 - 20000$$

$$x = 800$$

$$y = 20000 - 15(1300)$$

$$y = 20000 - 19500$$

$$y = 500$$

$x\ (kg)$	$y\ (kg)$
0	1250
256	1010
512	770
768	530
800	500
1024	290
1280	50

b. 7000000

$$7000000 = 1500x + 1600y + 3000000$$

$$4000000 = 1500x + 1600y$$

$$4000000 - 1500x = 1600y$$

$$y = \frac{4000000 - 1500x}{1600}$$

$$y = 2500 - 0.9375x$$

Como nos estamos refiriendo a cantidades preferiblemente enteras, a partir de ecuaciones Diofanticas podríamos establecer una tabla de valores para que los costos sean exactamente de 7000000.

La ecuación

$$1500x + 1600y = 4000000$$

Simplificando

$$15x + 16y = 40000$$

El máximo común divisor entre $15 \ \ y \ \ 16$ se obtiene asi:

$(15,16) = 1$ Por algoritmo de división $\quad 16 = 15(1) + 1$

$$\rightarrow \quad 15(-1) + 16(1) = 1$$

$$\rightarrow \quad 15(-40000) + 16(40000) = 40000$$

$$\rightarrow \quad 15(16m - 40000) + 16(40000 - 15m) = 40000; \quad m \in \mathbb{Z}^+$$

Tal que

$$x = 16m - 40000 \quad \text{Y} \quad y = 40000 - 15m$$

Como $x, y \in \mathbb{Z}^+$ entonces

$$16m - 40000 \geq 0$$

$$16m \geq 40000$$

$$m \geq 2500$$

$$40000 - 15m \geq 0$$

$$40000 \geq 15m$$

$$m \leq \frac{40000}{15} = 2666{,}7 \approx 2666$$

Por tanto

$$2500 \leq m \leq 2666$$

La tabla se puede construir a partir de los valores de este intervalo (en total son 166 soluciones enteras para la ecuacion); por ejemplo si $m = 2620 \ \ entonces$

$$x = 16(2620) - 40000$$

$$x = 41920 - 40000$$

$$x = 1920$$

$$y = 40000 - 15(2620)$$

$$y = 40000 - 39300$$

$$y = 700$$

$x\ (kg)$	$y\ (kg)$
32	2470
560	1975
1088	1480
1616	985
1920	700
2144	490
2656	10

c. 10000000

$$10000000 = 1500x + 1600y + 3000000$$

$$7000000 = 1500x + 1600y$$

$$7000000 - 1500x = 1600y$$

$$y = \frac{7000000 - 1500x}{1600}$$

$$y = 4375 - 0.9375x$$

Como nos estamos refiriendo a cantidades preferiblemente enteras, a partir de ecuaciones Diofanticas podríamos establecer una tabla de valores para que los costos sean exactamente de 10000000.

La ecuación

$$1500x + 1600y = 7000000$$

Simplificando

$$15x + 16y = 70000$$

El máximo común divisor entre $15 \;\; y \;\; 16$ se obtiene asi:

$(15,16) = 1$ Por algoritmo de división $\qquad 16 = 15(1) + 1$

$$\rightarrow \qquad 15(-1) + 16(1) = 1$$

$$\rightarrow \qquad 15(-70000) + 16(70000) = 70000$$

$$\rightarrow \qquad 15(16m - 70000) + 16(70000 - 15m) = 70000; \quad m \in \mathbb{Z}^{+}$$

Tal que

$$x = 16m - 70000 \quad \text{Y} \quad y = 70000 - 15m$$

Como $x, y \in \mathbb{Z}^{+}$ entonces

$$16m - 70000 \geq 0$$

$$16m \geq 70000$$

$$m \geq 4375$$

$$40000 - 15m \geq 0$$

$$40000 \geq 15m$$

$$m \leq \frac{70000}{15} = 4666{,}7 \approx 4666$$

Por tanto

$$4375 \leq m \leq 4666$$

La tabla se puede construir a partir de los valores de este intervalo (en total son 291 soluciones enteras para la ecuacion); por ejemplo si $m = 4472 \;\; entonces$

$$x = 16(4472) - 70000$$

$$x = 71552 - 70000$$

$$x = 1552$$

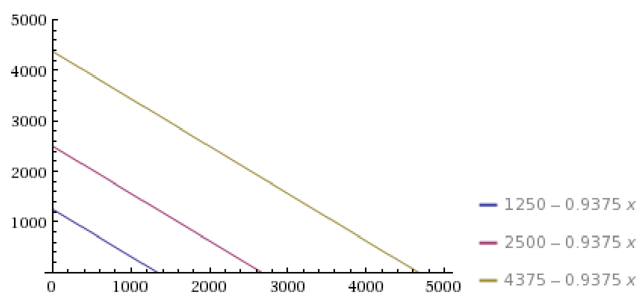
$$y = 70000 - 15(4472)$$

$$y = 70000 - 67080$$

$$y = 2920$$

$x\ (kg)$	$y\ (kg)$
16	4360
944	3490
1552	2920
1872	2620
2800	1750
3728	800
4640	25

En un graficador online se podría mostrar el comportamiento de las funciones en una variable:



d. k

$$k = 1500x + 1600y + 3000000$$

$$k - 3000000 = 1500x + 1600y$$

$$k - 3000000 - 1500x = 1600y$$

$$y = \frac{k - 3000000 - 1500x}{1600}$$

$$y = \left(\frac{k}{1600} - 1875\right) - 0.9375x$$

Como nos estamos refiriendo a cantidades preferiblemente enteras, a partir de ecuaciones Diofanticas podríamos establecer una tabla de valores para que los costos sean exactamente de $k \ \ millones$.

La ecuación

$$1500x + 1600y = k - 3000000$$

Simplificando

$$15x + 16y = \frac{k - 3000000}{100}$$

El máximo común divisor entre $15 \ \ y \ \ 16$ se obtiene asi:

$(15{,}16) = 1$ Por algoritmo de división $16 = 15(1) + 1$

$$\rightarrow \quad 15(-1) + 16(1) = 1$$

$$\rightarrow \quad 15\left(-\frac{k - 3000000}{100}\right) + 16\left(\frac{k - 3000000}{100}\right) = \frac{k - 3000000}{100}$$

$$\rightarrow \quad 15\left(16m - \frac{k - 3000000}{100}\right) + 16\left(\frac{k - 3000000}{100} - 15m\right) = \frac{k - 3000000}{100}; \quad m \in \mathbb{Z}^{+}$$

Tal que

$$x = 16m - \frac{k-3000000}{100} \quad \text{Y} \quad y = \frac{k-3000000}{100} - 15m$$

Como $x, y \in \mathbb{Z}^{+}$ entonces

$$16m - \frac{k - 3000000}{100} \geq 0 \qquad\qquad m \geq \frac{k - 3000000}{1600}$$

$$16m \geq \frac{k - 3000000}{100} \qquad\qquad \frac{k - 3000000}{100} - 15m \geq 0$$

$$\frac{k-3000000}{100} \geq 15m \qquad\qquad m \leq \frac{k-3000000}{1500}$$

Por tanto

$$\frac{k-3000000}{1600} \leq m \leq \frac{k-3000000}{1500}$$

La tabla se puede construir a partir de los valores de este intervalo (en total son

$$\frac{k-3000000}{1500} - \frac{k-3000000}{1600} = \frac{1600k - 4800000000 - 1500k + 4500000000}{2400000}$$

$$= \frac{100k - 300000000}{2400000}$$

$$= \frac{k-3000000}{24000}$$

Soluciones enteras para la ecuación).

Sede 2.

Con la ecuación del costo

$$C(x,y) = 1500x + 1600y + 3000000$$

Como tomaron como un valor constante de

c. 5000000

$$5000000 = 1500x + 1600y + 3000000$$

$$2000000 = 1500x + 1600y$$

$$2000000 - 1500x = 1600y$$

$$y = \frac{2000000 - 1500x}{1600}$$

$$y = 1250 - 0.9375x$$

Como nos estamos refiriendo a cantidades preferiblemente enteras, a partir de ecuaciones Diofanticas podríamos establecer una tabla de valores para que los costos sean exactamente de $5´000.000$.

La ecuación

$$2000000 - 1500x = 1600y$$

Podríamos expresarla como

$$1600y + 1500x = 2000000$$

Simplificando

$$15x + 16y = 20000$$

El máximo común divisor entre $15 \quad y \quad 16$ se obtiene asi:

$(15,16) = 1$ Por algoritmo de división $\quad 16 = 15(1) + 1$

$$\rightarrow \quad 15(-1) + 16(1) = 1$$

$$\rightarrow \quad 15(-20000) + 16(20000) = 20000$$

$$\rightarrow \quad 15(16m - 20000) + 16(20000 - 15m) = 20000; \quad m \in \mathbb{Z}^{+}$$

Tal que

$$x = 16m - 20000 \quad \text{Y} \quad y = 20000 - 15m$$

Como $x, y \in \mathbb{Z}^{+}$ entonces

$$16m - 20000 \geq 0 \qquad\qquad 16m \geq 20000$$

$$m \geq 1250$$

$$20000 - 15m \geq 0$$

$$20000 \geq 15m$$

$$m \leq \frac{20000}{15} = 1333{,}3 \approx 1333$$

Por tanto

$$1250 \leq m \leq 1333$$

La tabla se puede construir a partir de los valores de este intervalo (en total son 83 soluciones enteras para la ecuacion); por ejemplo si $m = 1300 \quad entonces$

$$x = 16(1300) - 20000$$

$$x = 20800 - 20000$$

$$x = 800$$

$$y = 20000 - 15(1300)$$

$$y = 20000 - 19500$$

$$y = 500$$

$x\ (kg)$	$y\ (kg)$
0	1250
256	1010
512	770
768	530
800	500
1024	290
1280	50

d. 7000000

$$7000000 = 1500x + 1600y + 3000000$$

$$4000000 = 1500x + 1600y$$

$$4000000 - 1500x = 1600y$$

$$y = \frac{4000000 - 1500x}{1600}$$

$$y = 2500 - 0.9375x$$

Como nos estamos refiriendo a cantidades preferiblemente enteras, a partir de ecuaciones Diofanticas podríamos establecer una tabla de valores para que los costos sean exactamente de 7000000.

La ecuación

$$1500x + 1600y = 4000000$$

Simplificando

$$15x + 16y = 40000$$

El máximo común divisor entre 15 y 16 se obtiene asi:

$(15{,}16) = 1$ Por algoritmo de división $16 = 15(1) + 1$

$$\rightarrow \quad 15(-1) + 16(1) = 1$$

$$\rightarrow \quad 15(-40000) + 16(40000) = 40000$$

$$\rightarrow \quad 15(16m - 40000) + 16(40000 - 15m) = 40000; \quad m \in \mathbb{Z}^+$$

Tal que

$$x = 16m - 40000 \quad \text{Y} \quad y = 40000 - 15m$$

Como $x, y \in \mathbb{Z}^+$ entonces

$$16m - 40000 \geq 0 \qquad\qquad 40000 - 15m \geq 0$$

$$16m \geq 40000 \qquad\qquad 40000 \geq 15m$$

$$m \geq 2500$$

$$m \leq \frac{40000}{15} = 2666{,}7 \approx 2666$$

Por tanto

$$2500 \leq m \leq 2666$$

La tabla se puede construir a partir de los valores de este intervalo (en total son 166 soluciones enteras para la ecuacion); por ejemplo si $m = 2620 \quad entonces$

$$x = 16(2620) - 40000 \qquad\qquad y = 40000 - 15(2620)$$

$$x = 41920 - 40000 \qquad\qquad y = 40000 - 39300$$

$$x = 1920 \qquad\qquad y = 700$$

$x\ (kg)$	$y\ (kg)$
32	2470
560	1975
1088	1480
1616	985
1920	700
2144	490
2656	10

d. 10000000

$$10000000 = 1500x + 1600y + 3000000$$

$$7000000 = 1500x + 1600y$$

$$7000000 - 1500x = 1600y$$

$$y = \frac{7000000 - 1500x}{1600}$$

$$y = 4375 - 0.9375x$$

Como nos estamos refiriendo a cantidades preferiblemente enteras, a partir de ecuaciones Diofanticas podríamos establecer una tabla de valores para que los costos sean exactamente de 10000000.

La ecuación

$$1500x + 1600y = 7000000$$

Simplificando

$$15x + 16y = 70000$$

El máximo común divisor entre $15 \quad y \quad 16$ se obtiene asi:

$(15,16) = 1$ Por algoritmo de división $\quad 16 = 15(1) + 1$

$$\rightarrow \quad 15(-1) + 16(1) = 1$$

$$\rightarrow \quad 15(-70000) + 16(70000) = 70000$$

$$\rightarrow \quad 15(16m - 70000) + 16(70000 - 15m) = 70000; \quad m \in \mathbb{Z}^+$$

Tal que

$$x = 16m - 70000 \quad \text{Y} \quad y = 70000 - 15m$$

Como $x, y \in \mathbb{Z}^+$ entonces

$$16m - 70000 \geq 0$$

$$16m \geq 70000$$

$$m \geq 4375$$

$$40000 - 15m \geq 0$$

$$40000 \geq 15m$$

$$m \leq \frac{70000}{15} = 4666{,}7 \approx 4666$$

Por tanto

$$4375 \leq m \leq 4666$$

La tabla se puede construir a partir de los valores de este intervalo (en total son 291 soluciones enteras para la ecuacion); por ejemplo si $m = 4472 \quad entonces$

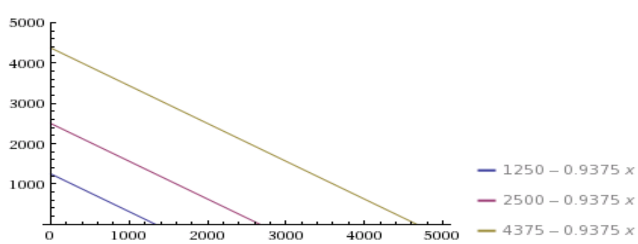
$$x = 16(4472) - 70000 \qquad\qquad y = 70000 - 15(4472)$$

$$x = 71552 - 70000 \qquad\qquad y = 70000 - 67080$$

$$x = 1552 \qquad\qquad y = 2920$$

$x\ (kg)$	$y\ (kg)$
16	4360
944	3490
1552	2920
1872	2620
2800	1750
3728	800
4640	25

En un graficador online se podría mostrar el comportamiento de las funciones en una variable:



e. k

$$k = 1500x + 1600y + 3000000$$

$$k - 3000000 = 1500x + 1600y$$

$$k - 3000000 - 1500x = 1600y$$

$$y = \frac{k - 3000000 - 1500x}{1600}$$

$$y = \left(\frac{k}{1600} - 1875\right) - 0.9375x$$

Como nos estamos refiriendo a cantidades preferiblemente enteras, a partir de ecuaciones Diofanticas podríamos establecer una tabla de valores para que los costos sean exactamente de $k\ millones$.

La ecuación

$$1500x + 1600y = k - 3000000$$

Simplificando

$$15x + 16y = \frac{k - 3000000}{100}$$

El máximo común divisor entre $15 \ y \ 16$ se obtiene asi:

$(15{,}16) = 1$ Por algoritmo de división $16 = 15(1) + 1$

$$\rightarrow \quad 15(-1) + 16(1) = 1$$

$$\rightarrow \quad 15\left(-\frac{k - 3000000}{100}\right) + 16\left(\frac{k - 3000000}{100}\right) = \frac{k - 3000000}{100}$$

$$\rightarrow \quad 15\left(16m - \frac{k - 3000000}{100}\right) + 16\left(\frac{k - 3000000}{100} - 15m\right) = \frac{k - 3000000}{100}; \quad m \in \mathbb{Z}^+$$

Tal que

$$x = 16m - \frac{k-3000000}{100} \quad \text{Y} \quad y = \frac{k-3000000}{100} - 15m$$

Como $x, y \in \mathbb{Z}^+$ entonces

$$16m - \frac{k - 3000000}{100} \geq 0 \qquad \frac{k - 3000000}{100} - 15m \geq 0$$

$$16m \geq \frac{k - 3000000}{100} \qquad \frac{k - 3000000}{100} \geq 15m$$

$$m \geq \frac{k - 3000000}{1600} \qquad m \leq \frac{k - 3000000}{1500}$$

Por tanto

$$\frac{k - 3000000}{1600} \leq m \leq \frac{k - 3000000}{1500}$$

La tabla se puede construir a partir de los valores de este intervalo (en total son

$$\frac{k - 3000000}{1500} - \frac{k - 3000000}{1600} = \frac{1600k - 4800000000 - 1500k + 4500000000}{2400000}$$

$$= \frac{100k - 300000000}{2400000}$$

$$= \frac{k - 3000000}{24000}$$

Soluciones enteras para la ecuación).

Sede 3.

Con la ecuación del costo

$$C(x, y) = 1500x + 1600y + 3000000$$

Como tomaron como un valor constante de

e. 5000000

$$5000000 = 1500x + 1600y + 3000000$$

$$2000000 = 1500x + 1600y$$

$$2000000 - 1500x = 1600y$$

$$y = \frac{2000000 - 1500x}{1600}$$

$$y = 1250 - 0.9375x$$

Como nos estamos refiriendo a cantidades preferiblemente enteras, a partir de ecuaciones Diofanticas podríamos establecer una tabla de valores para que los costos sean exactamente de $5'000.000$.

La ecuación

$$2000000 - 1500x = 1600y$$

Podríamos expresarla como

$$1600y + 1500x = 2000000$$

Simplificando

$$15x + 16y = 20000$$

El máximo común divisor entre $15 \quad y \quad 16$ se obtiene así:

$(15,16) = 1$ Por algoritmo de división $\qquad 16 = 15(1) + 1$

$$\rightarrow \qquad 15(-1) + 16(1) = 1$$

$\rightarrow \qquad 15(-20000) + 16(20000) = 20000$

$$\rightarrow \qquad 15(16m - 20000) + 16(20000 - 15m) = 20000; \quad m \in \mathbb{Z}^{+}$$

Tal que

$$x = 16m - 20000 \quad \text{Y} \quad y = 20000 - 15m$$

Como $x, y \in \mathbb{Z}^{+}$ entonces

$$16m - 20000 \geq 0$$

$$16m \geq 20000$$

$$m \geq 1250$$

$$20000 - 15m \geq 0$$

$$20000 \geq 15m$$

$$m \leq \frac{20000}{15} = 1333{,}3 \approx 1333$$

Por tanto

$$1250 \leq m \leq 1333$$

La tabla se puede construir a partir de los valores de este intervalo (en total son 83 soluciones enteras para la ecuacion); por ejemplo si $m = 1300 \quad entonces$

$$x = 16(1300) - 20000$$

$$x = 20800 - 20000$$

$$x = 800$$

$$y = 20000 - 15(1300)$$

$$y = 20000 - 19500$$

$$y = 500$$

$x\ (kg)$	$y\ (kg)$
0	1250
256	1010
512	770
768	530
800	500
1024	290

1280	50

f. 7000000

$$7000000 = 1500x + 1600y + 3000000$$

$$4000000 = 1500x + 1600y$$

$$4000000 - 1500x = 1600y$$

$$y = \frac{4000000 - 1500x}{1600}$$

$$y = 2500 - 0.9375x$$

Como nos estamos refiriendo a cantidades preferiblemente enteras, a partir de ecuaciones Diofanticas podríamos establecer una tabla de valores para que los costos sean exactamente de 7000000.

La ecuación

$$1500x + 1600y = 4000000$$

Simplificando

$$15x + 16y = 40000$$

El máximo común divisor entre $15 \;\; y \;\; 16$ se obtiene asi:

$(15{,}16) = 1$ Por algoritmo de división $\qquad 16 = 15(1) + 1$

$$\rightarrow \qquad 15(-1) + 16(1) = 1$$

$$\rightarrow \qquad 15(-40000) + 16(40000) = 40000$$

$$\rightarrow \qquad 15(16m - 40000) + 16(40000 - 15m) = 40000; \quad m \in \mathbb{Z}^{+}$$

Tal que

$$x = 16m - 40000 \quad \text{Y} \quad y = 40000 - 15m$$

Como $x, y \in \mathbb{Z}^+$ entonces

$$16m - 40000 \geq 0 \qquad\qquad 40000 \geq 15m$$

$$16m \geq 40000 \qquad\qquad m \leq \frac{40000}{15} = 2666{,}7 \approx 2666$$

$$m \geq 2500$$

$$40000 - 15m \geq 0$$

Por tanto

$$2500 \leq m \leq 2666$$

La tabla se puede construir a partir de los valores de este intervalo (en total son 166 soluciones enteras para la ecuacion); por ejemplo si $m = 2620 \quad entonces$

$$x = 16(2620) - 40000 \qquad\qquad y = 40000 - 15(2620)$$

$$x = 41920 - 40000 \qquad\qquad y = 40000 - 39300$$

$$x = 1920 \qquad\qquad y = 700$$

$x\ (kg)$	$y\ (kg)$
32	2470
560	1975
1088	1480
1616	985
1920	700
2144	490
2656	10

e. 10000000

$$10000000 = 1500x + 1600y + 3000000$$

$$7000000 = 1500x + 1600y$$

$$7000000 - 1500x = 1600y$$

$$y = \frac{7000000 - 1500x}{1600}$$

$$y = 4375 - 0.9375x$$

Como nos estamos refiriendo a cantidades preferiblemente enteras, a partir de ecuaciones Diofanticas podríamos establecer una tabla de valores para que los costos sean exactamente de 10000000.

La ecuación

$$1500x + 1600y = 7000000$$

Simplificando

$$15x + 16y = 70000$$

El máximo común divisor entre $15 \quad y \quad 16$ se obtiene asi:

$(15,16) = 1$ Por algoritmo de división $\qquad 16 = 15(1) + 1$

$$\rightarrow \qquad 15(-1) + 16(1) = 1$$

$$\rightarrow \qquad 15(-70000) + 16(70000) = 70000$$

$$\rightarrow \qquad 15(16m - 70000) + 16(70000 - 15m) = 70000; \quad m \in \mathbb{Z}^{+}$$

Tal que

$$x = 16m - 70000 \quad \text{Y} \quad y = 70000 - 15m$$

Como $x, y \in \mathbb{Z}^{+}$ entonces

$$16m - 70000 \geq 0$$

$$16m \geq 70000$$

$$m \geq 4375$$

$$40000 - 15m \geq 0$$

$$40000 \geq 15m$$

$$m \leq \frac{70000}{15} = 4666{,}7 \approx 4666$$

Por tanto

$$4375 \leq m \leq 4666$$

La tabla se puede construir a partir de los valores de este intervalo (en total son 291 soluciones enteras para la ecuacion); por ejemplo si $m = 4472 \quad entonces$

$$x = 16(4472) - 70000$$

$$x = 71552 - 70000$$

$$x = 1552$$

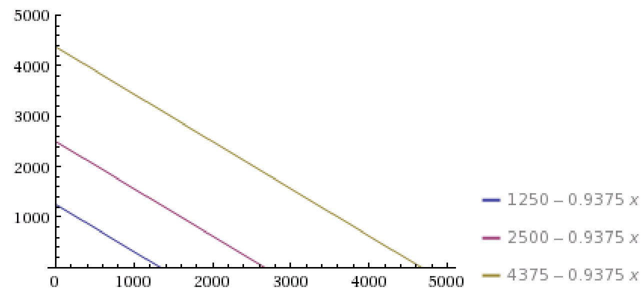
$$y = 70000 - 15(4472)$$

$$y = 70000 - 67080$$

$$y = 2920$$

$x\ (kg)$	$y\ (kg)$
16	4360
944	3490
1552	2920
1872	2620
2800	1750
3728	800
4640	25

En un graficador online se podría mostrar el comportamiento de las funciones en una variable:



f. k

$$k = 1500x + 1600y + 3000000$$

$$k - 3000000 = 1500x + 1600y$$

$$k - 3000000 - 1500x = 1600y$$

$$y = \frac{k - 3000000 - 1500x}{1600}$$

$$y = \left(\frac{k}{1600} - 1875\right) - 0.9375x$$

Como nos estamos refiriendo a cantidades preferiblemente enteras, a partir de ecuaciones Diofanticas podríamos establecer una tabla de valores para que los costos sean exactamente de $k\ millones$.

La ecuación

$$1500x + 1600y = k - 3000000$$

Simplificando

$$15x + 16y = \frac{k - 3000000}{100}$$

El máximo común divisor entre $15\ \ y\ \ 16$ se obtiene asi:

$(15,16) = 1$ Por algoritmo de división $\quad 16 = 15(1) + 1$

$$\rightarrow \quad 15(-1) + 16(1) = 1$$

$$\rightarrow \quad 15\left(-\frac{k-3000000}{100}\right) + 16\left(\frac{k-3000000}{100}\right) = \frac{k-3000000}{100}$$

$$\rightarrow \quad 15\left(16m - \frac{k-3000000}{100}\right) + 16\left(\frac{k-3000000}{100} - 15m\right) = \frac{k-3000000}{100}; \quad m \in \mathbb{Z}^{+}$$

Tal que

$$x = 16m - \frac{k-3000000}{100} \quad \text{Y} \quad y = \frac{k-3000000}{100} - 15m$$

Como $x, y \in \mathbb{Z}^{+}$ entonces

$$16m - \frac{k-3000000}{100} \geq 0$$

$$16m \geq \frac{k-3000000}{100}$$

$$m \geq \frac{k-3000000}{1600}$$

$$\frac{k-3000000}{100} - 15m \geq 0$$

$$\frac{k-3000000}{100} \geq 15m$$

$$m \leq \frac{k-3000000}{1500}$$

Por tanto

$$\frac{k-3000000}{1600} \leq m \leq \frac{k-3000000}{1500}$$

La tabla se puede construir a partir de los valores de este intervalo, en total son:

$$\frac{k-3000000}{1500} - \frac{k-3000000}{1600} = \frac{1600k - 4800000000 - 1500k + 4500000000}{2400000}$$

$$= \frac{100k - 300000000}{2400000}$$

$$= \frac{k-3000000}{24000}$$

Soluciones enteras para la ecuación.

Este resultado es conocido por el estudiante y relaciona la ecuación con una recta en el plano XY, además se infiere que son infinitos valores que me generan este costo de $5\ millones$.

Fija la cantidad de kg de baja densidad en 1000.

También puede pensar en dejar fijo una cantidad de kg para un tipo de polietileno

$x\ (kg)$	$y\ (kg)$	$C(x,y)$
1000	200	4820000
1000	300	4980000
1000	500	5300000
1000	1600	7060000
1000	2000	7070000
1000	2200	8020000
1000	2500	8500000
1000	3000	9300000

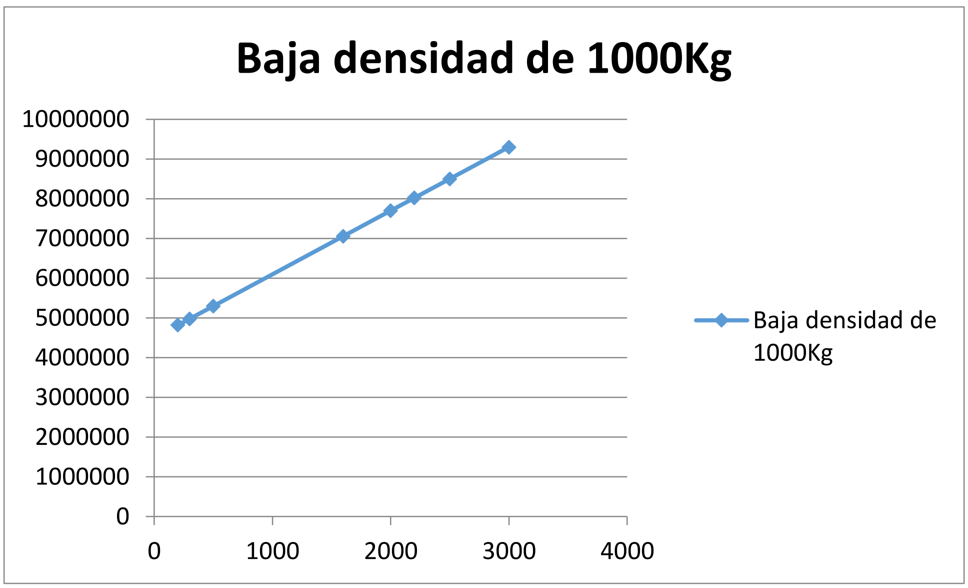
Y asocia el valor constante en la fórmula del costo

$$C(x, y) = 1500x + 1600y + 3000000$$

$$C = 1500(1000) + 1600y + 3000000$$

$$C = 4500000 + 1600y$$

Lo cual también relaciona con una recta en el plano CY, se encuentra que son muchos las posibilidades para el costo y la cantidad de kg del otro tipo de polietileno.



SITUACIÓN 4

En la sede principal de la empresa se cuenta con la siguiente información sobre el precio por kg del polietileno de baja y alta densidad, según la cantidad de kg que se producen y venden al mes para algunos de sus clientes.

Kg	Precio de Venta Polietileno de Baja densidad por kg	Precio de Venta polietileno de Alta densidad por kg
10	2495	2597
500	2250	2450

1000	2000	2300
1400	1800	2180
2100	1450	1970
2800	1100	1760
3000	1000	1700
4000	500	1400
4500	250	1250
5000	0	1100

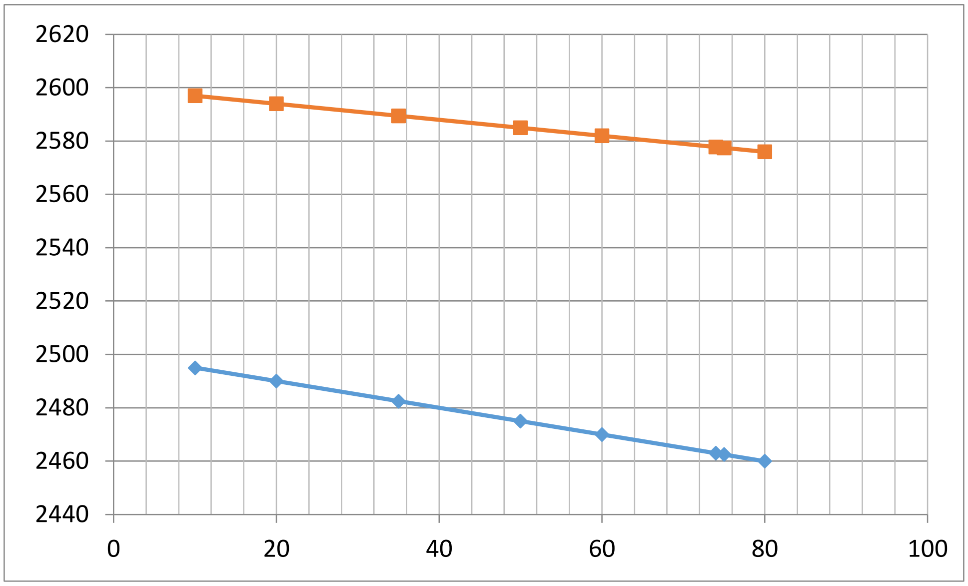
La junta directiva considera que no solo se deben analizar los costos de la misma, sino también los ingresos y utilidades. Por lo anterior, la junta se hace los siguientes cuestionamientos, que debe dar solución el gerente y realizar una socialización en la próxima reunión.

1. ¿Cómo son los ingresos y la utilidad de la sede principal de la empresa?
2. ¿Qué gráfica describe de manera visual el comportamiento de los ingresos y su interpretación?
3. ¿Qué gráfica describe de manera visual el comportamiento de las utilidades y su interpretación?

ANTICIPACIÓN 1 SITUACIÓN 4

INGRESOS

Realizamos un gráfico que permita visualizar el comportamiento del precio de los dos tipos de polietileno



Con base a esta gráfica observamos que los precios tienen un comportamiento lineal y se construiría un modelo lineal para que represente el precio en función de la cantidad de kg de cada tipo de plástico.

Como conocemos los puntos por donde pasa la recta, encontramos la ecuación de la recta como se hace en secundaria

a. Primero encontramos la pendiente $m = \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1}$.
b. Encontramos la ecuación de la recta $p - p_0 = m(x - p_0)$
c. Despejamos a p para dejarlo como función que depende de x.

Para el polietileno de baja densidad se encuentra la siguiente ecuación

$$p = 2.500 - \frac{1}{2}x$$

Para el Polietileno de alta densidad encontramos la ecuación

$$p = 2.600 - \frac{3}{10}y$$

La primer cuestión es: ¿qué modelo me permite realizar el estudio de los ingresos?, si realizamos un análisis de cómo puede una empresa que solo produce dos productos diferentes encontrar sus ingresos concluimos que

Ingresos **=** $(Precio\ de\ producto1) * (cantidad\ p1) + (Precio\ de\ producto2) * (Cantidad\ p2)$

Esto nos perite llegar al siguiente modelo

$$R(x,y) = \left(2.500 - \frac{1}{2}x\right)x + \left(2.600 - \frac{3}{10}y\right)y$$

$$R(x,y) = 2.500x + 2.600y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{10}y^2$$

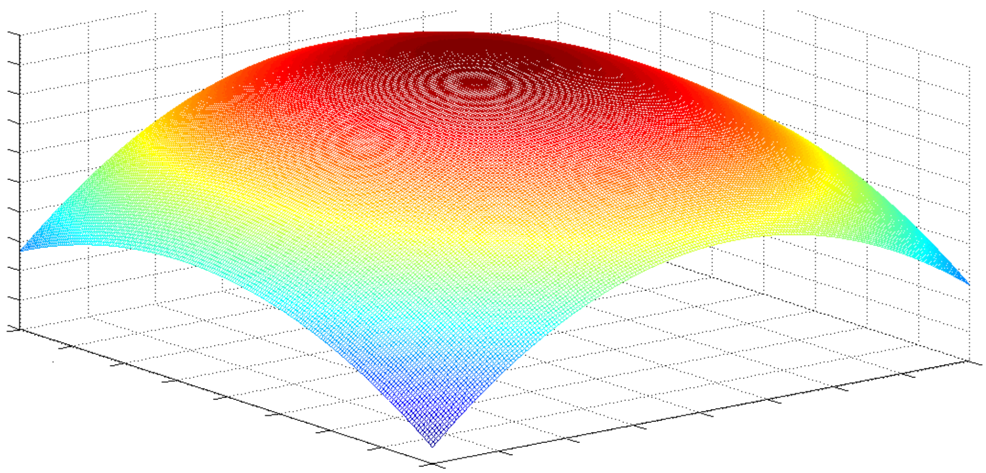
Este modelo representa los ingresos de la empresa al producir y vender y cantidad de kg de polietileno de alta y x cantidad de kg de baja densidad.

Ahora, cómo es el comportamiento de los ingresos.

Polietileno de baja densidad kg	Polietileno de alta densidad kg	Ingresos Totales
10	22	82004,8
100	35	335632,5
300	3000	5805000
500	700	2798000
1000	32	2082892,8
2500	21	3179467,7
3000	4000	8600000
3500	5000	8125000
3800	3333	7613133,3
4000	215	2545132,5

4200	123	1995261,3
4300	456	2628219,2
4500	7432	3877812,8
4600	123	1235261,3
4900	5990	5054970
10	22	82004,8

La tabla no nos muestra mucho sobre este comportamiento, por lo que trataríamos de realizar una representación gráfica de los ingresos y nos encontramos con:



Esta función de ingresos muestra un comportamiento de paraboloide, y esto muestra como los ingresos no siempre son crecientes.

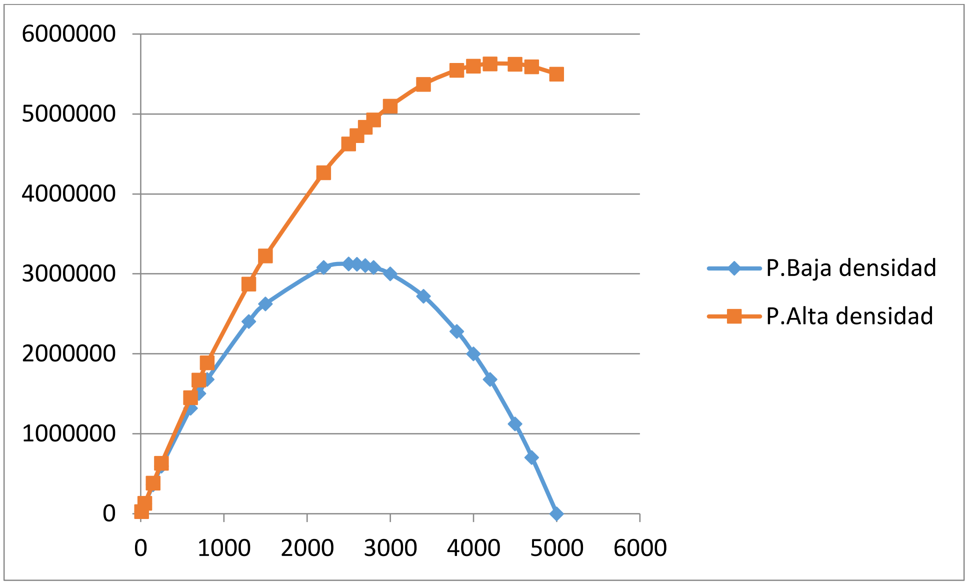
ANTICIPACIÓN 2 SITUACIÓN 4

El estudiante encuentra el valor de los ingresos totales para cada uno de los polietilenos, en este caso la tabla se complementa de la siguiente manera:

kg	Precio por kg de Polietileno de Baja densidad	(Cantidad kg)*(Precio del kg)	Precio por kg de polietileno de Alta densidad	(Cantidad kg)*(Precio del kg)
10	2495	24950	2597	25970
50	2475	123750	2585	129250

150	2425	363750	2555	383250
250	2375	593750	2525	631250
600	2200	1320000	2420	1452000
700	2150	1505000	2390	1673000
800	2100	1680000	2360	1888000
1300	1850	2405000	2210	2873000
1500	1750	2625000	2150	3225000
2200	1400	3080000	1940	426800
2500	1250	3125000	1850	4625000
2600	1200	3120000	1820	4732000
2700	1150	3105000	1790	4833000
2800	1100	3080000	1760	4928000
3000	1000	3000000	1700	5100000
3400	800	2720000	1580	5372000
3800	600	2280000	1460	5548000
4000	500	2000000	1400	5600000
4200	400	1680000	1340	5628000
4500	250	1125000	1250	5625000
4700	150	705000	1190	5593000
5000	0	0	1100	5500000

Si se realiza una gráfica con la cantidad de Kg y los ingresos de cada uno de los dos tipos de polietileno se encuentra con:



Se observa en la gráfica que las curvas tienen un comportamiento parabólico, y se pueden usar diferentes métodos para encontrar las funciones que la representan, después de realizar los métodos nos encontramos con las siguientes funciones de ingresos para cada tipo de polietileno:

$$R.Baja(x) = 2.500x - \frac{1}{2}x^2$$

$$R.Alta(y) = 2.600x - \frac{3}{10}y^2$$

Con estos ingresos podemos encontrar los ingresos totales de la empresa, la cual está dada por:

$$R(x,y) = \left(2.500 - \frac{1}{2}x\right)x + \left(2.600 - \frac{3}{10}y\right)y$$

$$R(x,y) = 2.500x + 2.600y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{10}y^2$$

Esta es la misma función que encontramos en la anticipación 1.

UTILIDAD

La utilidad está dada por

$$Utilidad = Ingresos - Costos$$

$$Utilidad = R - C$$

$$U(x,y) = (2.500x + 2.600y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{10}y^2) - (1500x + 1600y + 3000000)$$

$$U(x,y) = 1000x + 1000y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{10}y^2 - 3000000$$

SITUACIÓN 5

Con la información que se tiene de la sede principal de la empresa responder las siguientes cuestiones:

1. ¿Qué cantidad de Kg debe producir y vender para que sus ingresos sean de $5\ millones$ o de $5{,}5\ millones$, o $K\ millones$?
2. ¿Cómo hace la empresa para saber cuánto debe producir y vender para obtener el ingreso deseado?
3. ¿Cuáles son las cantidades de kg que debe producir y vender de cada tipo de polietileno para que sus utilidades sean de $12\ millones$, o $8\ millones$ o $K\ millones$?
4. ¿Cuál es la utilidad de la empresa para cualquier cantidad de kg de cada tipo de polietileno?

ANTICIPACIÓN SITUACIÓN 5

Ahora si tomamos los ingresos como un valor de KM tenemos lo siguiente:

$$2.500x + 2.600y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{10}y^2 = K$$

Y realizamos una operación de completar cuadrados en las dos expresiones cuadráticas, encontramos que la ecuación queda de la forma:

$$\frac{(x - 2.500)^2}{a^2} + \frac{(y - 13000/3)^2}{b^2} = 1$$

Donde las contantes a y b toman los valores constantes

$$a = \sqrt{\frac{3}{5}\left(\left(\frac{13.000}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}(2K + 6.250.000)\right)}$$

$$b = \sqrt{\left(\frac{13.000}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}(2K + 6.250.000)}$$

La ecuación representa elipses con el mismo centro.

¿Qué cantidad de Kg debe producir y vender para que sus ingresos sean de 5.000.000?

Debemos tomar el valor $K = 5.000.000$ y encontramos la ecuación:

$$\frac{(x - 2.500)^2}{27.516.666{,}7} + \frac{(y - 13000/3)^2}{45.861.111{,}6} = 1$$

Lo que representa una elipse y donde todos los puntos sobre la curva son el conjunto de puntos (x, y) que permiten generar unos ingresos de 5.000.000.

Los suscritos:

JACKSON ALEXANDER ORJUELA DEVIA	**con C.C N°**	**93414252 de Ibagué**
	con C.C N°	
	con C.C N°	
	con C.C N°	
	con C.C N°	

Manifiesto la voluntad de:

Autorizar [x]

No Autorizar [ ] **Motivo**: ____________________

La consulta en físico y la virtualización de **mi OBRA**, con el fin de incluirlo en el repositorio institucional de la Universidad del Tolima. Esta autorización se hace sin ánimo de lucro, con fines académicos y no implica una cesión de derechos patrimoniales de autor.

Manifestamos que se trata de una OBRA original y como de la autoría de LA OBRA y en relación a la misma, declara que la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA, se encuentra, en todo caso, libre de todo tipo de responsabilidad, sea civil, administrativa o penal (incluido el reclamo por plagio).

Por su parte la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA se compromete a imponer las medidas necesarias que garanticen la conservación y custodia de la obra tanto en espacios físico como virtual, ajustándose para dicho fin a las normas fijadas en el Reglamento de Propiedad Intelectual de la Universidad, en la Ley 23 de 1982 y demás normas concordantes.

La publicación de:

Trabajo de grado	X	Artículo		Proyecto de Investigación	
Libro		Parte de libro		Documento de conferencia	
Patente		Informe técnico			

Otro: (fotografía, mapa, radiografía, película, video, entre otros) [ ]

Producto de la actividad académica/científica/cultural en la Universidad del Tolima, para que con fines académicos e investigativos, muestre al mundo la producción intelectual de la Universidad del Tolima. Con todo, en mi condición de autor me reservo los derechos morales de la obra antes citada con arreglo al artículo 30 de la Ley 23 de 1982. En concordancia suscribo este documento en el momento mismo que hago entrega del trabajo final a la Biblioteca Rafael Parga Cortes de la Universidad del Tolima.

De conformidad con lo establecido en la Ley 23 de 1982 en los artículos 30 ***"…Derechos Morales. El autor tendrá sobre su obra un derecho perpetuo, inalienable e irrenunciable"*** **y 37 "…*Es lícita la reproducción por cualquier medio, de una obra literaria o científica, ordenada u obtenida por el interesado en un solo ejemplar para su uso privado y sin fines de lucro*". El artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "*los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores*" y en su artículo 61 de la Constitución Política de Colombia.**

- Identificación del documento:

CARACTERIZACIÓN DE LAS CONSTRUCCIONES COGNITIVAS DE LOS ESTUDIANTES DE MATEMÁTICAS 2 CON LAS FUNCIONES DE DOS VARIABLES

- Trabajo de grado como requisito parcial para optar al título de:

MAESTRIA EN EDUCACIÓN

- Proyecto de Investigación correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado "Trabajo de Grado"): ________________

- Informe Técnico correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado "Trabajo de Grado"): ________________

- Artículo publicado en revista: ________________

- Capítulo publicado en libro: ________________

- Conferencia a la que se presentó: ________________

Quienes a continuación autentican con su firma la autorización para la digitalización e inclusión en el repositorio digital de la Universidad del Tolima, el:

Día: **16** Mes: **AGOSTO** Año: **2017**

Autores: Firma

Nombre:	JACKSON ALEXANDER ORJUELA DEVIA	93.414.252 Ibagué	C.C.	93414252
Nombre:			C.C	
Nombre:			C.C.	
Nombre:			C.C.	

El autor y/o autores certifican que conocen las derivadas jurídicas que se generan en aplicación de los principios del derecho de autor.